מכניקה - הרצאה 10: תנע זוויתי וסיבוב סביב ציר קבוע

אסף פאר

16 ביוני 2020

הערה חשובה: סיכומי ההרצאות מבוססים על הרצאותיהם של **ד״ר יוסי בן ציון** כפי שנכתבו על ידי **לאה יעבץ**, ושל **פרופסור דייוד קסלר** כמו כן, ההרצאות מבוססות על מקורות [1] ו-[2].

1 סיבוב סביב ציר קבוע: דוגמאות

בשיעור הקודם, התחלנו בפיתוח משוואות התנועה של גוף הנע בתנועה סיבובית. נמשיך ונפתח את המשוואות, אם הגבלה משמעותית: אנחנו מניחים כאן שציר הסיבוב אינו משתנה במרחב (דיון בתנועה סיבובית סביב ציר המשנה את כיוונו במרחב ייאלץ להידחות לשנה הבאה).

כפי שהראינו בשיעור הקודם, ניתן לרשום את משוואות התנועה באופן אנלוגי למשוואות התנועה הקווית. עבור גוף המסתובב סביב ציר z מתקיים

$$L_z = I\omega \tag{1}$$

כאשר ω היא המהירות הזוויתית, I הוא מומנט האינרציה ו- L_z הוא התנע הזוויתי.

כאשר מופעל מומנט חיצוני, הראינו ש-

$$T_z = I\alpha \tag{2}$$

כש- $\alpha = d\omega/dt$ היא התאוצה הזוויתית.

כמו כן, האנרגיה הקינטית המשוייכת לתנועה סיבובית היא

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{3}$$

שיטת פתרון בעיות אשר בהן גופים מסתובבים, אנלוגית לפתרון בעיות הכוללות תנועה לינארית. נדגים זאת בדוגמה הבאה.

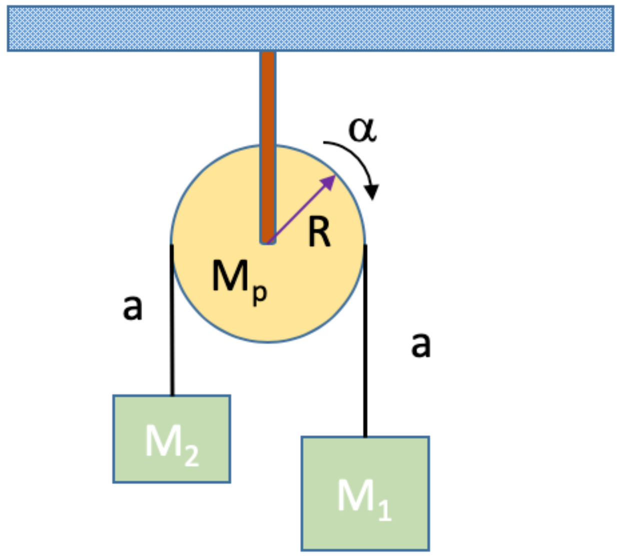
1.1 מכונת אטווד עם גלגלת לא אידיאלית

בהרצאה 3, פתרנו את בעיית מכונת אטווד - גלגלת עליה תלויות שתי מסות שונות. כעת, נחזור על פתרון הבעיה, אלא שנניח, בנוסף, שלגלגלת עצמה יש מסה, וכן שהחבל אינו מחליק (כך שהגלגלת אכן מתגלגלת). המערכת מתוארת באיור 1.

במקרה שלפנינו יש 3 מסות (שתי המסות והגלגלת). הגלגלת מסתובבת סביב צירה. לפיכך, עלינו לפתור מערכת בת 4 משוואות:

(1) משוואת הכוחות על מסה 1:

$$M_1 g - T_1 = M_1 a \tag{4}$$



איור 1: מכונת אטווד

כש - T_1 היא המתיחות בחוט.
(2) משוואת הכוחות עבור מסה 2:

$$T_2 - M_2 g = M_2 a \tag{5}$$

(3) המומנט הפועל על הגלגלת:

$$T = T_1 R - T_2 R = I\alpha \tag{6}$$

(4) משוואת הכוחות על הגלגלת:

$$N - T_1 - T_2 - M_p g = 0 \tag{7}$$

כש - N היא המתיחות בחבל המחזיק את הגלגלת. מאחר שאנחנו לא צריכים לדעת את ערכו של N, המשוואה האחרונה לא תורמת לפתרון הבעיה.
אם החבל אינו מחליק, ידוע ש- $v = \omega R$ ומכאן, $a = \alpha R$. מכאן נקבל על ידי חיבור שתי המשוואות הראשונות:

$$M_1 g - M_2 g - (T_1 - T_2) = (M_1 + M_2)a \tag{8}$$

וממשוואה (6) נקבל

$$(T_1 - T_2) = \frac{I\alpha}{R} = \frac{Ia}{R^2} \tag{9}$$

ולכן

$$(M_1 - M_2)g - \frac{Ia}{R^2} = (M_1 + M_2)a \tag{10}$$

אם הגלגלת היא (בקרוב) דיסקה אחידה שטוחה, קיבלנו ש-

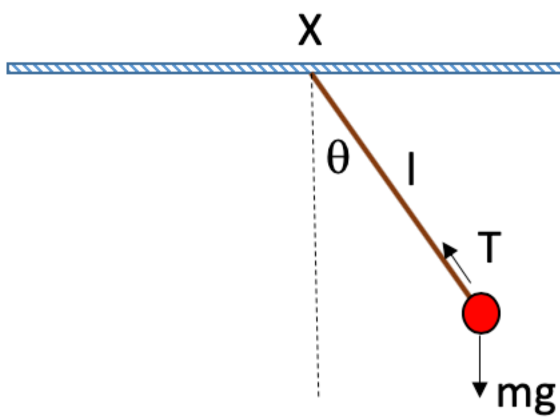
$$I = \frac{M_p}{2} R^2$$

ולכן סה"כ

$$a = \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2 + M_p/2} \right) g \tag{11}$$

1.2 תנועת מטוטלת

גם את בעית המטוטלת פתרנו כבר (יותר מפעם אחת). אלא שתמיד הנחנו שהמטוטלת היא "נקודתית" - כלומר, שכל המסה שלה מרוכזת בנקודה אחת, הנמצאת בקצהו של חבל באורך l (ראה איור 2). זה כמובן לא מצב פיסיקלי. כעת נרחיב את הפיתוח למטוטלת פיסיקלית, אך קודם לכן נחזור על החישוב תוך שימוש בפורמליזם של תנועה סיבובית. כפי שנראה, שימוש בפורמליזם זה מפשט את פתרון הבעיה ומוכלל בקלות לבעית המטוטלת הלא אידיאלית.



איור 2: מטוטלת אידיאלית

נחשב את התנע הזוויתי והמומנט סביב נקודת התליה (מסומנת X באיור 2). מומנט האינרציה של המסה הוא $I = ml^2$. המתיחות בחוט מייצרת כוח רדיאלי, ולכן אינה משפיעה על המומנט. הכוח היחידי המשפיע על המומנט הוא כוח הכבידה, ולכן המומנט הוא

$$T_x = -mgr_\perp = -mgl \sin\theta. \tag{12}$$

(סימן המינוס נובע מכיוון הסיבוב - עם כיוון השעון באיור). מאחר שבזוויות קטנות

$$\sin\theta \approx \theta$$

משוואת התנועה היא

$$T_x = I\alpha = I\ddot{\theta} \tag{13}$$

$$-mgl\theta = I\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I}\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{14}$$

כאשר השתמשנו ב- $I = ml^2$.

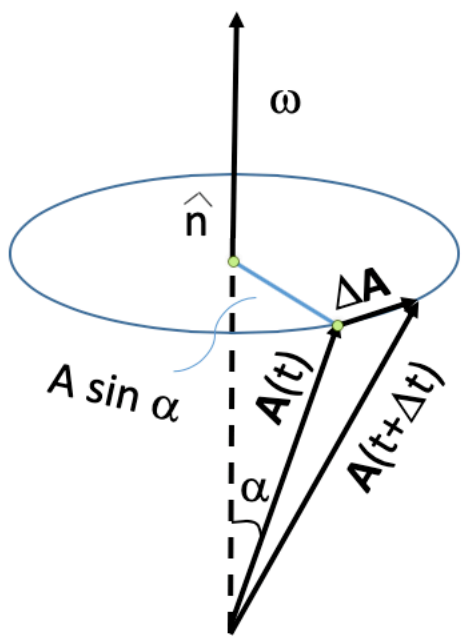
כמובן שזו משוואה של אוסצילטור הרמוני, עם פתרון

$$\theta = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

כאשר $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

1.3 מטוטלת פיסיקלית

במציאות, המטוטלת אינה בהכרח נקודתית, אלא יכולה להיות בעלת צורה כלשהיא (ראה איור 3). ואולם, שיטת האנליזה בחישוב הקודם תקפה גם כאן.



איור 3: מטוטלת פיסיקלית

נניח שלמטוטלת מסה M, ושמרכז המסה שלה נמצא במרחק l מציר הסיבוב. מומנט האינרציה סביב ציר הסיבוב, I_x אינו שווה במקרה הכללי ל-Ml^2, אלא תלוי בצורת הגוף ובהתפלגות המסה.

פרט לעובדה זו, האנליזה זהה לזו שביצענו בניתוח תנועת המטוטלת הפשוטה. לכן המסקנה היא שהמטוטלת תבצע תנועה הרמונית פשוטה עם תדירות (מהירות זוויתית)

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I_x}} \tag{15}$$

2 תנועה משולבת: הזזה וסיבוב

במערכות רבות ישנה תנועה משולבת - הזזה וסיבוב. לדוגמה, גלגל המתגלגל במורד מישור. במבט ראשון, הבעיה נראית מבלבלת, שכן ציר הסיבוב אינו קבוע. ואולם, כפי שציינתי, ניתן להפריד כל תנועה לתנועת מרכז המסה ולתנועת סיבוב סביב מרכז המסה, וכך לפתור בעיות שנראות מורכבות.

גם בסעיף זה, אנחנו מניחים שציר הסיבוב אינו משנה את כיוונו במרחב, אלא רק את מיקומו. נסמן את כיוון ציר הסיבוב בכיוון z. נחשב את התנע הזוויתי בכיוון ציר z, L_z.

לשם החישוב, נחלק את הגוף ל-N חלקיקים, לכל אחד מסה m_j, כש- $j = 1...N$. כל אחד מהחלקיקים נמצא במיקום $\vec{r}_j$ ביחס לראשית הצירים (של מערכת אינרציאלית שרירותית שבחרנו). התנע הזוויתי הכללי של הגוף הוא

$$\vec{L} = \sum_{j=1}^{N} (\vec{r}_j \times m_j \dot{\vec{r}_j}) \tag{16}$$

על מנת להתקדם, נזכור שמרכז המסה נמצא ב-

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum m_j \vec{r}_j}{M} \tag{17}$$

כש- M היא המסה הכוללת של הגוף. נעבור למערכת קואורדינטות שמרכזה במרכז המסה: נסמן את המיקום של כל חלקיק במערכת זו ב- $\vec{r'}$, כאשר

$$\vec{r'_j} = \vec{r}_j - \vec{R}_{CM} \tag{18}$$

נרשום את משוואה 16 באמצעות המיקומים $\vec{r'}$:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \textstyle\sum_j (\vec{R}_{CM} + \vec{r'_j}) \times m_j (\dot{\vec{R}}_{CM} + \dot{\vec{r}}'_j) \\ &= \vec{R}_{CM} \times \textstyle\sum_j m_j \dot{\vec{R}}_{CM} + \textstyle\sum_j m_j \vec{r'_j} \times \dot{\vec{R}}_{CM} + \vec{R}_{CM} \times \textstyle\sum_j m_j \dot{\vec{r}}'_j + \textstyle\sum_j m_j \vec{r'_j} \times \dot{\vec{r}}'_j \end{aligned} \tag{19}$$

בצד ימין ישנם 4 איברים. נתחיל מהאיבר השני:

$$\sum_j m_j \vec{r'_j} = \sum_j m_j (\vec{r}_j - \vec{R}_{CM}) = \sum_j m_j \vec{r}_j - M\vec{R}_{CM} = 0 \tag{20}$$

באופן דומה, גם האיבר השלישי מתאפס, שכן $\sum_j m_j \vec{r'_j} = 0$ ולכן גם הנגזרת מתאפסת.

נפתח את האיבר הראשון:

$$\vec{R}_{CM} \times \sum_j m_j \dot{\vec{R}}_{CM} = \vec{R}_{CM} \times M\dot{\vec{R}}_{CM} = \vec{R}_{CM} \times M\vec{v}_{CM} \tag{21}$$

כאשר $\vec{v}_{CM}$ היא מהירות מערכת מרכז המסה. כלומר, האיבר הראשון מייצג את התנע הזוויתי הנובע מתנועת מערכת מרכז המסה.

האיבר הרביעי מייצג את התנע הזוויתי עקב הסיבוב סביב מרכז המסה. עבור סיבוב סביב ציר z נקבל:

$$\left(\sum_j m_j \vec{r'_j} \times \dot{\vec{r}}'_j\right)_z = \left(\sum_j m_j \vec{r}'_{\perp,j} \times \dot{\vec{r}}'_{\perp,j}\right)_z = \sum m_j {r'_{\perp,j}}^2 \omega = I_0 \omega \tag{22}$$

כש - $r'_{\perp,j}$ הוא הווקטור מיחידת המסה m_j ועד לציר הסיבוב, האנך לציר הסיבוב (ציר z), ω היא המהירות הזוויתית ו-$I_0 = \sum m_j {r'_{\perp,j}}^2$ הוא מומנט האינרציה.

סה"כ נקבל:

$$L_z = \left(\vec{R}_{CM} \times M\vec{v}_{CM}\right)_z + I_0 \omega \tag{23}$$

כלומר: התנע הזוויתי הכולל של הגוף הוא סכום התנע הוויתי כתוצאה מסיבוב סביב מרכז המסה של הגוף והתנע הזוויתי הנובע מתנועת מרכז המסה ביחס לראשית הצירים.

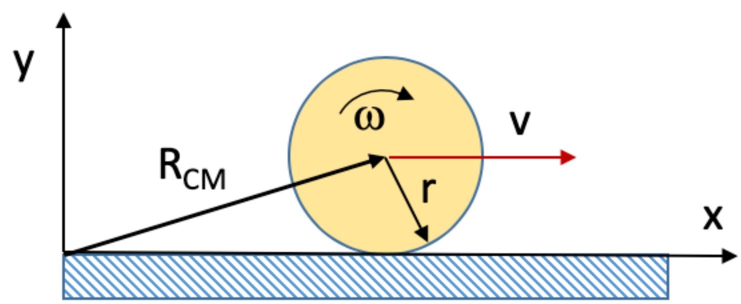
לאיבר הראשון (תנועת מרכז המסה) קוראים **תנע זוויתי מסלולי**, ולאיבר השני (סיבוב סביב מרכז המסה) קוראים **ספין**. נשים לב, שהספין אינו תלוי בבחירת מערכת הקואורדינטות, שכן הוא מבטא סיבוב סביב מרכז המסה. במובן זה, הוא פנימי לגוף, ותלוי רק בתכונותיו.

2.1 דוגמה: תנע זוויתי של גלגל מסתובב

נחשב את התנע הזוויתי של גלגל אחיד בעל מסה M ורדיוס r המתגלגל ללא החלקה על משטח ישר (ראה איור 4). מומנט האינרציה של הגלגל עבור סיבוב סביב מרכז המסה שלו הוא $I_0 = \frac{1}{2}Mr^2$. לכן התנע הזוויתי עבור סיבוב סביב מרכז המסה הוא

$$L_0 = -I_0\omega = -\frac{1}{2}Mr^2\omega$$

כאשר סימן המינוס מקורו בכיוון הסיבוב (עם כיוון השעון), כך שכיוון L_0 הוא בכיוון $-z$.



איור 4: גלגל מתגלגל

הינחנו שהגלגל מסתובב ללא החלקה, ולכן מהירותו הקווית היא $v = r\omega$. מכאן

$$(\vec{R}_{CM} \times M\vec{v})_z = -Mrv$$

(נזכור שעקב המכפלה הווקטורית, יש לקחת בחישוב רק את רכיב $\vec{R}_{CM}$ שאנך לרכיב המהירות. בדוגמה כאן, $\vec{R}_{CM,\perp} = r$). מכאן שהתנע הזוויתי הכללי של הגלגל סביב נקודת ראשית הצירים הוא

$$L_z = -\frac{1}{2}Mr^2\omega - Mrv = -\frac{1}{2}Mr^2\omega - Mr^2\omega = -\frac{3}{2}Mr^2\omega \tag{24}$$

2.2 מומנט על גוף נע

באופן אנלוגי לתנע הזוויתי, ניתן גם לחלק את המומנט הפועל על גוף נע לשני איברים:

$$\vec{T} = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j = \sum_j (\vec{r}'_j + \vec{R}_{CM}) \times \vec{F}_j = \sum_j \vec{r}'_j \times \vec{F}_j + \vec{R}_{CM} \times \vec{F} \tag{25}$$

כאשר $\vec{F} = \sum_j \vec{F}_j$ הוא סכום הכוחות החיצוניים. האיבר הראשון מצד ימין במשוואה 25 הוא המומנט עבור סיבוב סביב מרכז המסה (ע״י הכוחות החיצוניים), והאיבר השני הוא המומנט הפועל על מרכז המסה עצמו.

מאחר ש- $\vec{T} = d\vec{L}/dt$ נשתמש במשוואה 23, $\left(L_z = \left(\vec{R}_{CM} \times M\vec{v}_{CM}\right)_z + I_0\omega\right)$ בכדי לרשום

$$T_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{R}_{CM} \times M\vec{v}_{CM}\right)_z + I_0\alpha \tag{26}$$

כש $\alpha = d\omega/dt$ היא התאוצה הזוויתית.

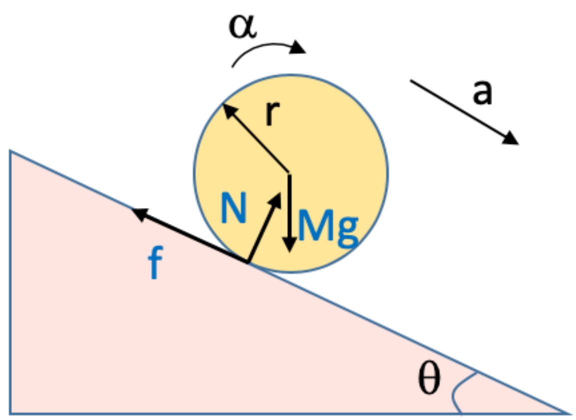
לכן נוכל לרשום את המומנט כ-

$$T_z = (\vec{R}_{CM} \times \vec{F})_z + T_0 \tag{27}$$

כש- $T_0 = I_0\alpha$.

2.3 דוגמה: גלגל מתגלגל במורד מישור משופע

דוגמה קלאסית היא זו של גלגל המתגלגל (ללא החלקה) במורד מישור משופע. נניח שרדיוס הגלגל הוא r ומסתו M. הגלגל מתגלגל - לא החלקה, במורד מישור משופע שזוויתו θ. נניח שהגלגל הוא אחיד, כך שמומנט האינרציה שלו עבור סיבוב סביב מרכזו הוא $I_0 = \frac{1}{2}Mr^2$ (ראה איור 5). נחשב את תאוצת הגלגל.



איור 5: גלגל מתגלגל במורד מישור משופע

הכוחות הפועלים על הגלגל הם כוח הכובד, כוח החיכוך (מסומן כ- f), והכוח הנורמלי. משוואת הכוחות עבור מערכת מרכז המסה בציר x (במורד המישור) נותנת

$$Mg\sin\theta - f = Ma \tag{28}$$

משוואת המומנט עבור סיבוב סביב מרכז המסה:

$$fr = I_0\alpha \tag{29}$$

עבור תנועת גלגול לא החלקה, מתקיים

$$a = r\alpha \tag{30}$$

ולכן סה"כ נקבל:

$$Mg\sin\theta - I_0\frac{\alpha}{r} = Ma \tag{31}$$

$$Mg\sin\theta - I_0\frac{a}{r^2} = Ma$$

וע"י הצבת I_0,

$$Mg\sin\theta - \frac{1}{2}Ma = Ma \quad \rightarrow \quad a = \frac{2}{3}g\sin\theta \tag{32}$$

כלומר, קיבלנו שתאוצת הגוף קטנה יותר מאשר במקרה בו הגוף מחליק (ללא סיבוב). כמובן, דרך פשוטה להבין זאת היא שחלק מהאנרגיה הפוטנציאלית הפך לאנרגית סיבוב.

3 משפט העבודה-אנרגיה בתנועה סיבובית.

כפי שחילקנו את התנע הזוויתי והמומנט לחלק הנובע מתנועה סביב מרכז המסה ולתנועת מרכז המסה, כך ניתן לחלק את האנרגיה הקינטית. שוב, נחלק את הגוף ל-j חלקיקים בעלי מסות m_j, ונרשום

$$\begin{aligned} E_k &= \tfrac{1}{2}\sum_j m_j v_j^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_j m_j(\vec{r'_\perp}+\vec{v}_{CM})^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_j m_j\vec{r'_\perp}^2+\sum_j m_j\vec{r'_\perp}\cdot\vec{v}_{CM}+\tfrac{1}{2}\sum_j m_j\vec{v}_{CM}^2 \\ &= \tfrac{1}{2}I_0\omega^2+\tfrac{1}{2}Mv_{CM}^2 \end{aligned} \tag{33}$$

שוב, האיבר הראשון הוא האנרגיה הקינטית המשוייכת לתנועת הסיבוב סביב מרכז המסה (ספין), והאיבר השני משוייך לתנועת מרכז המסה במרחב.

כלומר, כאשר נשתמש במשפט העבודה- אנרגיה, יש לחלק את האנרגיה הקינטית לאנרגיה הנובעת מתנועה קווית ותנועה מעגלית. בכל אחד מהרכיבים נטפל בנפרד, כאשר שינוי האנרגיה בתנועה הקווית שווה לעבודה הנעשית על ידי הכוחות הגורמים לתנועה ($\int\vec{F}\cdot d\vec{r}$) ואילו שינוי האנרגיה בתנועת הסיבוב נוצר על ידי העבודה הנעשית על ידי המומנט ($\int Td\theta$).

3.1 דוגמה: שימוש בשימור האנרגיה על מנת לחשב את בעיית הגלגל המתגלגל במורד מישור משופע

נחזור על בעיית המישור המשופע, והפעם נפתור אותה באמצעות שימור האנרגיה. כמקודם, נניח גלגל בעל רדיוס r, מסה M ומומנט אינרציה $I_0=\frac{1}{2}Mr^2$ המתחיל להתגלגל (ללא החלקה) ממנוחה על מישור משופע בעל זווית θ.

נחשב את מהירות הגלגל לאחר שירד מגובה h. נחשב תחילה את העבודה. המרחק שעבר הגלגל הוא $l=h/\sin\theta$. לכן העבודה שביצעו הכוחות (כוח החיכוך ורכיב כוח הכובד בכיוון התנועה) היא

$$W=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}=(Mg\sin\theta-f)l$$

ומאחר שהגלגל התחיל ממנוחה, עבודה זאת שווה לאנרגיה הקינטית המשוייכת לתנועת מרכז המסה:

$$(Mg\sin\theta-f)l=\frac{1}{2}Mv^2 \tag{34}$$

משוואת העבודה-אנרגיה לתנועה סיבובית

$$\int_{\phi_a}^{\phi_b}Td\phi=\frac{1}{2}I_0\omega_b^2-\frac{1}{2}I_0\omega_a^2 \tag{35}$$

הכוח היחיד התורם למומנט הוא כוח החיכוך, ולכן נקבל

$$fr\phi=\frac{1}{2}I_0\omega^2. \tag{36}$$

עבור גלגול ללא חיכוך מתקיים $r\phi=l$ ולכן נקבל

$$fl=\frac{1}{2}I_0\omega^2$$

כמו כן, $\omega=v/r$, ולכן

$$fl=\frac{1}{2}I_0\frac{v^2}{r^2} \tag{37}$$

נציב במשוואה 34 ונקבל

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_0\frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M + M\right)v^2 = \frac{3}{4}Mv^2 \tag{38}$$

$$\rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

כאמור, המהירות **נמוכה יותר** מזו המתקבלת עבור החלקה ללא חיכוך, עקב העובדה שחלק מהאנרגיה הפך לאנרגיה של תנועה סיבובית.

נשים לב, שעקרונית יכולנו לרשום ישירות $Mgh = E_k = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$. היתרון בפיתוח המלא הוא שניתן לראות שבמקרה זה, החיכוך אינו גורם לאובדן של אנרגיה קינטית. האנרגיה הקשורה להזזה קטנה עקב החיכוך, ואולם האנרגיה הקשורה לתנועה סיבובית גדלה במידה זהה, כל שאין אובדן אנרגיה לחום, כפי שקיים במקרה של החלקה ללא גלגול.

4 טבלת סיכום

לסיכום הדיון, נביא טבלה המסכמת את הקשרים בין התנועה הקווית והתנועה הסיבובית.

תנועה קווית		תנועה סיבובית	
מיקום	$\vec{r}$	זווית	$\vec{\theta}$
מהירות	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	מהירות זוויתית	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$
מסה	m	מומנט אינרציה	$I = \sum m_i r_i^2$
תנע	$\vec{p} = m\vec{v}$	תנע זוויתי	$\vec{L} = I\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{p}$
כוח	$\vec{F}$	מומנט	$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$
משוואת התנועה	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$		$\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt}$
גדלים נשמרים	$\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{p} = const$		$\vec{T} = 0 \rightarrow \vec{L} = const$
אנרגיה קינטית	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$		$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$
עבודה	$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$		$W = \int \vec{T} \cdot d\theta$

רשימת מקורות

[1] Kleppner, D. & Kolenkow, R., *"An Introduction to Mechanics"* (Cambridge), second edition.
[2] Kittel, C., *"Mechanics"* (Berkeley Physics Course Vol. 1, McGraw-Hill);

תרגום לעברית על ידי האוניברסיטה הפתוחה