# מכניקה - הרצאה 10(ב): אוסצילטור הרמוני

אסף פאר

16 ביוני 2020

הערה חשובה: סיכומי ההרצאות מבוססים על הרצאותיהם של **ד"ר יוסי בן ציון** כפי שנכתבו על ידי **לאה יעבץ**, ושל **פרופסור דייוד קסלר** כמו כן, ההרצאות מבוססות על מקורות [1] ו-[2].

## 1 מבוא

בעבר כבר ניתחנו את התנועה ההרמונית. ואולם, כפי שציינתי, לאוסצילטור ההרמוני שימושים רבים מאוד בפיסיקה, החורגים בהרבה מניתוח תנועת מסה המחוברת לקפיץ. למעשה, כמעט כל פוטנציאל מוכר ניתן לקרוב סביב נקודת המינימום שלו לפוטנציאל ריבועי ($U \propto x^2$) ומכאן תיגזר תנועה הרמונית. בנוסף, לתנועה ההרמונית חשיבות רבה מעבר למכניקה הניוטונית- היא מופיעה פעמים רבות במערכות קוונטיות, בתורת השדות, וכו׳. כך שבעתיד אתם תיתקלו בה שוב ושוב - במידה הולכת וגוברת של מורכבות.

כאן אנחנו נשארים במסגרת המכניקה הקלאסית, ואולם נוסיף דרגות קושי בכך שננתח תנועה יותר "פיסיקלית" (כלומר, פחות אידיאלית), על ידי כך שנוסיף חיכוך (הגורם לדעיכה) וכן כוח חיצוני מאלץ.

## 2 תנועה הרמונית קלאסית: חזרה

נתחיל מחזרה מהירה על התנועה ההרמונית הקלאסית, זו של מסה $m$ המחוברת לקפיץ בעל קבוע $k$. על המסה פועל כוח $F = -kx$ (התנועה היא חד מימדית). משוואת התנועה, $m\ddot{x} = -kx$ נרשמת בצורה

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1}$$

כאשר

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{2}$$

פתרונה הוא

$$x = X_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \tag{3}$$

כאשר $X_0$ ו- $\phi$ הם קבועי אינטגרציה הנקבעים על ידי תנאי ההתחלה (לרוב אלה יהיו המיקום והמהירות בזמן $t = 0$).

ל-$X_0$ אנחנו קוראים **האמפליטודה** של התנועה, ו-$\omega_0$ היא **התדירות הזוויתית**. הזווית $\phi$ היא **הפאזה**. **מחזור** התנועה הוא $T = 2\pi/\omega_0$.

האנרגיה הקינטית של התנועה נתונה על ידי

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) = \frac{1}{2}kX_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) \tag{4}$$

האנרגיה הפוטנציאלית היא

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kX_0^2\cos^2(\omega_0 t + \phi) \tag{5}$$

מכאן שהאנרגיה הכללית היא

$$E_{tot} = E_k + U = \frac{1}{2}kX_0^2 \tag{6}$$

האנרגיה הכוללת היא קבועה - מצב אופייני לתנועה במערכת בה הכוח משמר.

## 3 אוסצילטור הרמוני דועך

האוסצילטור ההרמוני האידיאלי הוא חסר חיכוך. ואולם, במציאות תמיד קיים חיכוך. נחשב את ההשפעה של חיכוך מהצורה

$$F_{\text{fric}} = -bv$$

(זהו סוג חיכוך נפוץ מאוד במהירויות נמוכות, ודומה במהותו לצמיגות). הכוח הכללי הפועל על המסה הוא לכן

$$F = F_{spring} + F_{\text{fric}} = -kx - bv$$

ולכן משוואת התנועה תהיה

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \quad \rightarrow \quad \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{7}$$

כאשר $\gamma \equiv b/m$, ו- $\omega_0^2 = k/m$ כמקודם. כהערה, אוסיף שמשוואה זו אופיינית לא רק לתנועת אוסצילטור עם חיכוך, אלא גם, למשל, למעגל חשמלי המכיל נגד, קבל וסליל.

משוואה 7 היא משוואה דיפרנציאלית מסדר שני. ישנן שיטות מקובלות איך לפתור משוואה כזו. כאן נבחר בשיטה האהובה עלינו - ניחוש מלומד.

בהעדר חיכוך, אנחנו יודעים את הפתרון: $x = X_0\cos(\omega_0 t + \phi)$. מצד שני, אם כוח הקפיץ היה ניתן להזנחה , היינו מקבלים תנועה במהירות הדועכת אקספוננציאלית, $v = v_0 e^{-\gamma t}$. לכן ננחש פיתרון מהצורה

$$x = X_0 e^{-\alpha t}\cos(\omega_1 t + \phi). \tag{8}$$

ע"י הצבה במשוואה, נקבל

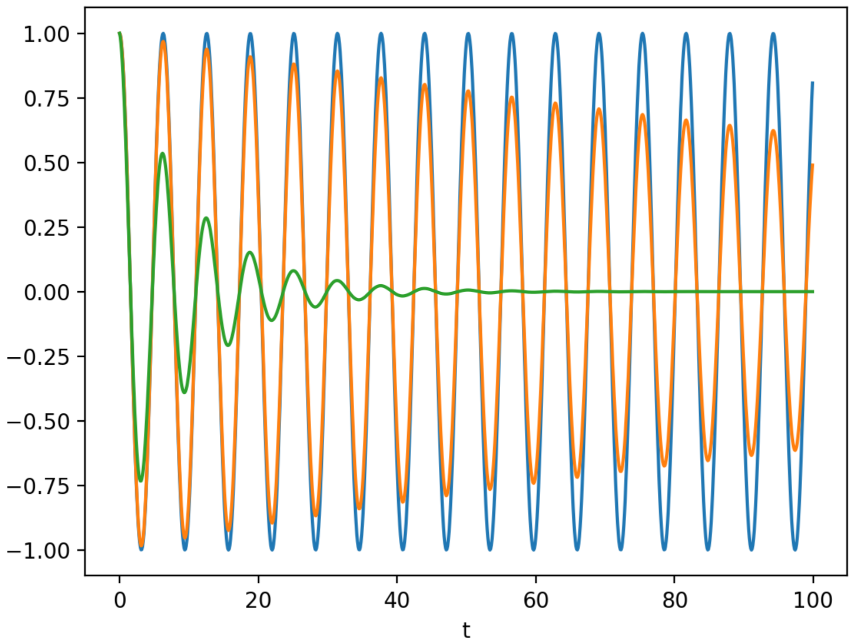
$$\alpha = \frac{\gamma}{2} \quad ; \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \tag{9}$$

כלומר, מבחינה פיסיקלית נניח ש- $\omega_0^2 - \gamma^2/4 > 0$.

הפתרון שמצאנו נקרא **תנועה הרמונית דועכת** ומתואר באיור 1 . נשים לב, שהתנועה דומה לזו של אוסצילטור הרמוני לא דועך, פרט לכך שהאמפליטודה דועכת באופן אקספוננציאלי בזמן, וכן שתדירות האוסצילציות, $\omega_1$ , קטנה מזו של האוסצילטור הלא דועך.

הפרמטר המשמעותי שמשפיע על צורת הדעיכה הוא היחס $\omega_1/\gamma$. עבור $\omega_1/\gamma \gg 1$, האמפליטודה יורדת רק במקצת בזמן שהקוסינוס מבצע תנודה אחת, והתנועה נקראת **דעיכה קלה**. לעומת זאת, אם $\omega_1/\gamma$ קטן (יחסית), האמפליטודה דועכת ל-0 אחרי מספר קטן של אוסצילציות, והתנועה מתוארת כ-**דעיכה חזקה**.

אם $\omega_0 < \gamma/2$ התנועה אינה אוסצילטורית, והפתרון שמצאנו אינו תקף. במקרה זה, המערכת בדעיכת יתר (overdamped) .




איור 1: כחול: תנועה הרמונית ללא דעיכה, $\gamma = 0$. כתום: דעיכה קלה, $\gamma/2\omega_1 = 1/200$. ירוק: $\gamma/2\omega_1 = 0.1$.

### 3.1 איבוד אנרגיה של אוסצילטור דועך

מאחר שחיכוך גורם לאובדן אנרגיה קינטית, האנרגיה הכללית של האוסצילטור הדועך יורדת עם הזמן. על מנת לחשב את דעיכת האנרגיה, נחשב את המהירות על ידי גזירת המיקום (משוואה 8) :

$$v = -X_0 e^{-(\gamma/2)t}\left[\omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi) + \frac{\gamma}{2}\cos(\omega_1 t + \phi)\right] \tag{10}$$

נתמקד בדעיכה קלה, עבורה $\omega_1 \approx \omega_0$ $(\omega_1 \gg \gamma)$ . במקרה זה נרשום:

$$v \approx v_0 e^{-(\gamma/2)t}\sin(\omega_1 t + \phi) \tag{11}$$

כש-$v_0 = -X_0\omega_0$.
האנרגיה הקינטית היא

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_0^2 e^{-\gamma t}\sin^2(\omega_0 t + \phi) \tag{12}$$

והאנרגיה הפוטנציאלית

$$U = \frac{1}{2}kX_0^2 e^{-\gamma t}\cos^2(\omega_0 t + \phi) \tag{13}$$

כך שסך הכל האנרגיה היא

$$E_{tot} = E_k + U = \frac{1}{2}kX_0^2 e^{-\gamma t} \tag{14}$$

כלומר, קיבלנו שהאנרגיה דועכת אקספוננציאלית כ-

$$E_{tot} = E_0 e^{-\gamma t} \quad \leftrightarrow \quad \frac{dE}{dt} = -\gamma E \tag{15}$$

וזמן הדעיכה האופייני הוא

$$\tau = \frac{1}{\gamma}. \tag{16}$$

### 3.2 מקדם האיכות Q

מקדם האיכות, או מקדם Q הוא פרמטר חסר מימדים המגדיר את מידת הריסון של האוסצילטור ההרמוני. ככל שהמקדם גדול יותר, כך האוסצילטור מרוסן פחות, ומתנודד במשך זמן רב יותר.

מקדם האיכות מוגדר כיחס בין האנרגיה הממוצעת באוסצילטור, והאנרגיה האובדת במחזור אחד.

מאחר שזמן מחזור הוא $\Delta t = 1/\omega_0$, נקבל שהאנרגיה האובדת במחזור היא

$$\Delta E \approx \frac{dE}{dt}\Delta t = \gamma E \frac{1}{\omega_0}$$

ומכאן

$$Q = \frac{E}{\Delta E} = \frac{E}{\gamma E/\omega_0} = \frac{\omega_0}{\gamma}. \tag{17}$$

כלומר, עבור דעיכה קלה, $Q \gg 1$ - לדוגמה, בשעונים אטומים, $Q \approx 10^{13}$.

## 4 אוסצילטור הרמוני מאולץ

אחת הבעיות המעניינות היא לדון בתכונות של אוסצילטור הרמוני כאשר פועל עליו כוח מחזורי. נניח לדוגמה כוח חיצוני הפועל על מסה המחוברת לקפיץ, מהצורה $F = F_0 \cos\omega t$. נשים לב, שלמחזור הכוח $\omega$ אין קשר למחזור הקפיץ, $\omega_0$. (דוגמאות נוספות לתנועה הרמונית הפועל עליה כוח מחזורי הם מבוגר המנדנד ילד בנדנדה, מיקרוגל, או מציאת תחנה ברדיו).

נניח בנוסף שיש חיכוך. משוואת התנועה של המסה תהיה אם כך

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx + F_0 \cos\omega t \tag{18}$$

נרשום אותה שוב כמו במקרה הקודם,

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{19}$$

כאשר, כמו במקרה הקודם, $\gamma = b/m$ ו-$\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

שוב, הדרך המהירה ביותר היא לנחש פיתרון. פתרון מהצורה $x = X_0 \cos\omega t$ לא יעבוד, שכן בנגזרת הראשונה ישנו סינוס. הפתרון שיעבוד יהיה מהצורה

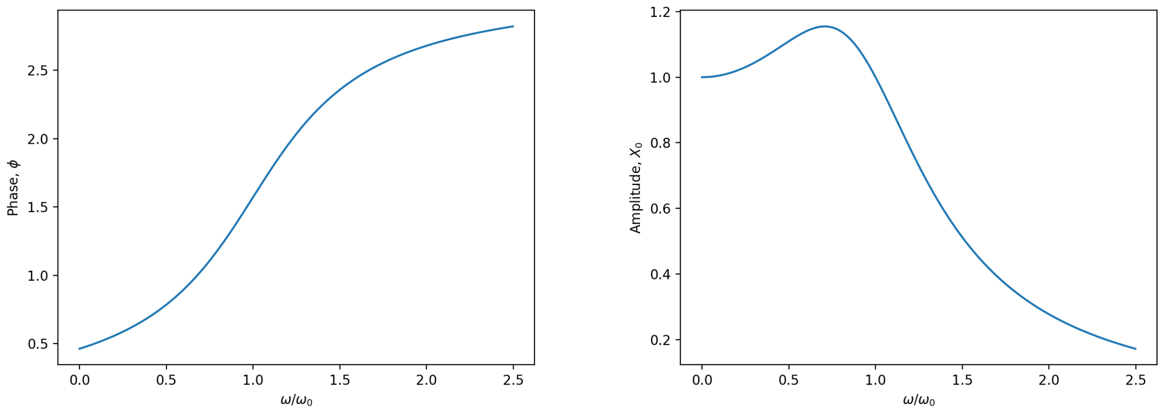
$$x = X_0 \cos(\omega t + \phi). \tag{20}$$

הצבה תיתן את המקדמים

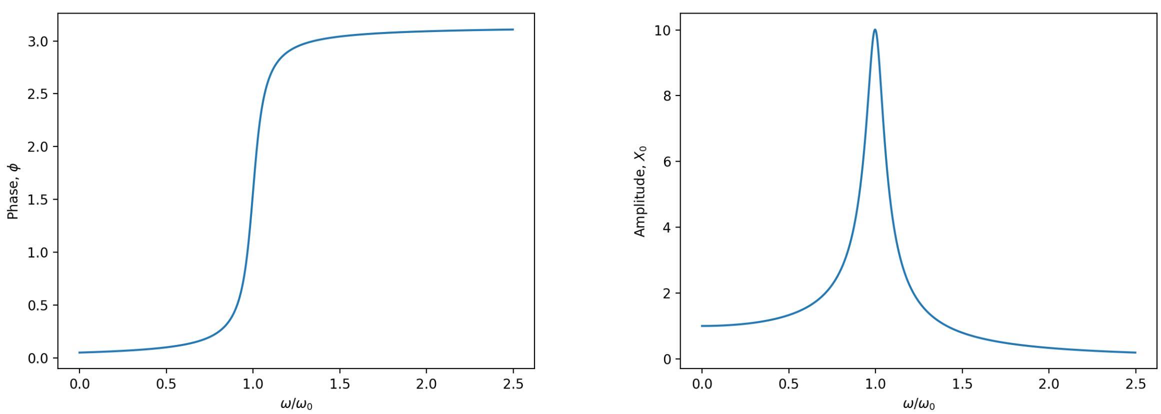
$$X_0 = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2\right]^{1/2}} \quad ; \qquad \tan\phi = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{21}$$

עבור $\omega_0 \approx \omega$ נוכל לקרב:

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega) \tag{22}$$




איור 2: ימין: האמפליטודה $X_0$ ושמאל: הפאזה, $\phi$ עבור $\gamma/\omega_0 = 1$.




איור 3: ימין: האמפליטודה $X_0$ ושמאל: הפאזה, $\phi$ עבור $\gamma/\omega_0 = 0.1$.

במקרה זה נוכל לקרב

$$X_0 = \frac{F_0}{2m\omega_0}\frac{1}{[(\omega_0-\omega)^2+(\gamma/2)^2]^{1/2}} \quad ; \qquad \tan\phi = \frac{\gamma/2}{\omega_0-\omega} \tag{23}$$

באיורים 2,3 מתוארת האמפליטודה ($X_0$) והפאזה $\phi$ כפונקציה של התדירות המאלצת, $\omega$. נשים לב שהפאזה משתנה ב- $\pi$ כשהתדירות המאלצת משתנה מ- $\omega_0 \ll \omega$ ל- $\omega_0 \gg \omega$.

כמובן שהמהירות נתונה על ידי

$$v = -V_0 \sin(\omega t + \phi) \tag{24}$$

כש - $V_0 = \omega X_0$.

## 4.1 אנרגיה באוסצילטור הרמוני מאולץ

עבור $\omega \approx \omega_0$ האנרגיה הכללית שווה ל-

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}X_0^2\left[k\cos^2(\omega t+\phi) + m\omega^2\sin^2(\omega t+\phi)\right] \approx \frac{1}{2}kX_0^2 \tag{25}$$

כלומר, נשמרת.

נשים לב, שבמצב זה, אנרגיה נכנסת למערכת ע"י הכוח המאלץ (המבצע עבודה), וכן יוצאת מהמערכת על ידי כוח החיכוך. במצב בו האנרגיה הכוללת נשמרת, יוצא איפה שהעבודה שמבצע הכוח המאלץ שווה לעבודה שמבצע כוח החיכוך.

באמצעות שימוש במשוואה 23 נוכל לרשום עבור $\omega \approx \omega_0$

$$E_{tot}(\omega) = \frac{1}{8}\frac{F_0^2}{m}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+(\gamma/2)^2} = E_0 Q^2 g(w) \tag{26}$$

כאשר

$$E_0 = \frac{1}{2}\frac{F_0^2}{m\omega_0^2} \quad ; \quad Q = \left(\frac{\omega_0}{\gamma}\right) \quad ; \quad g(\omega) = \frac{(\gamma/2)^2}{(\omega_0-\omega)^2+(\gamma/2)^2} \tag{27}$$

לשלושת הרכיבים במשוואה 27 יש משמעות פיסיקלית ברורה.

$E_0$ היא (פעמיים) האנרגיה הקינטית של חלקיק שפועל עליו רק הכוח המאלץ, $F_0\cos(\omega t)$ במשך מחזור אחד (פעמיים כיוון שעבור חלקיק חופשי אין את האנרגיה הפוטנציאלית של הקפיץ המחזיר).

$Q$ הוא מקדם האיכות, וקשור ישירות לזמן הדעיכה.

הפונקציה $g(\omega)$ נקראת **לורנציאן**. הפונקציה מופיעה לעיתים קרובות באנליזה של קווים ספקטרלים, ומתארת כיצד אנרגית האוסצילטור תלויה בתדירות הכוח המאלץ (בכימאית היא נקראת lineshape function ) . התדירות $\omega_0$ נקראת **תדירות התהודה** ( resonance frequency ) . השיא סביב $\omega_0$ נקרא **תהודה**.

בתהודה, $\omega = \omega_0$ נקבל $g(\omega) = 1$. העקומה יורדת ל $g(\omega) = 1/2$ עבור $\omega_\pm - \omega_0 = \pm\gamma/2$. רוחב התדירויות של העקומה כאשר ערכה הוא מחצית מהערך המקסימלי נקרא **רוחב התהודה** $\Delta W$ ( full width half maximum - FWHM ) .

מאחר ש- $\omega_+ - \omega_- = 2(\gamma/2) = \gamma$, מתקיים

$$\Delta\omega = \gamma. \tag{28}$$

כלומר, כאשר $\gamma$ יורד, העקומה נהית צרה יותר, וטווח התדירויות בהן המערכת מגיבה באופן משמעותי לכוח המאלץ הוא קטן.

הערך המקסימלי של האנרגיה האצורה בקפיץ היא

$$E_{\text{max}} = E_0 Q^2. \tag{29}$$

לתוצאה זו חשיבות רבה. כאמור, $E_0$ היא האנרגיה הקינטית הנוצרת מעבודת הכוח המאלץ (במחזור אחד). $Q$ יכול להיות בעל ערך גבוה מאוד, ומכאן שהאוסצילטור יכול לאגור כמות עצומה של אנרגיה.

כמו כן, נשים לב שכיוון ש- $\Delta\omega = \gamma$ נוכל לרשום את מקדם האיכות $Q$ כ-

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \tag{30}$$

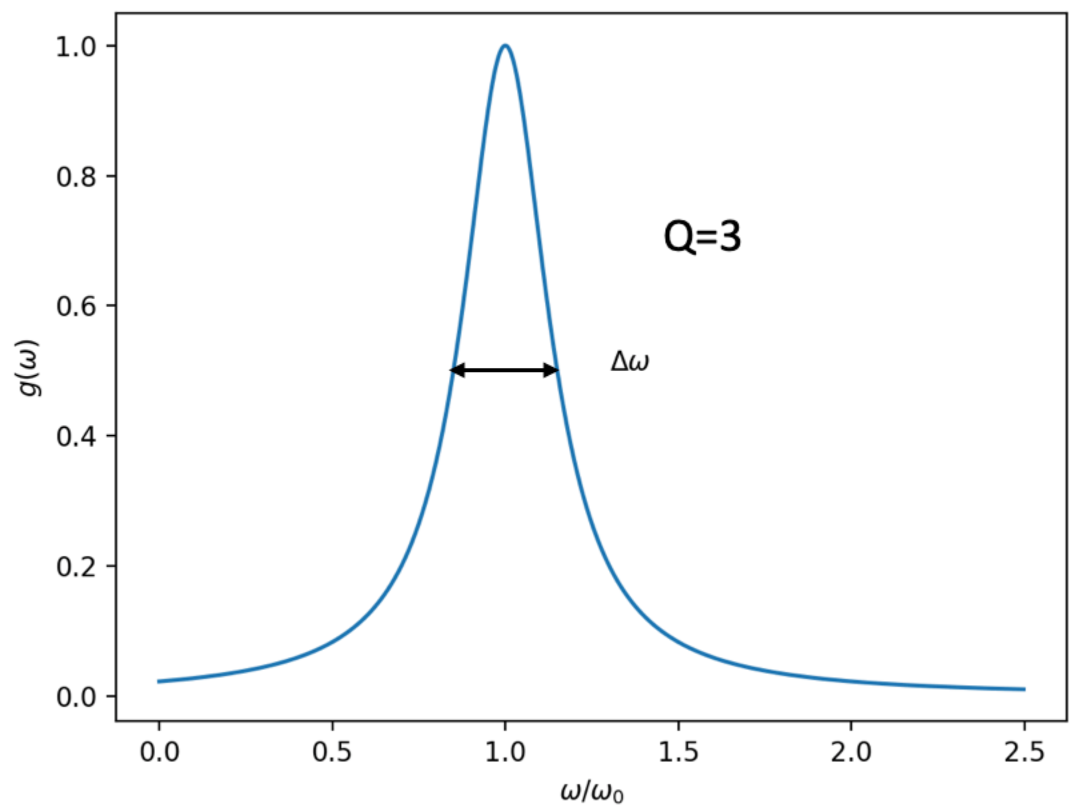
כלומר, $Q$ קובע את "חדות" עקומת התהודה (ראה איור 4). עבור $Q$ גבוה, המערכת לא תגיב לאילוץ, אלא אם הוא יקרה בתדירות קרובה מאוד לתדירות התהודה. מכאן השימוש באוסצילטורים הרמונים בשעונים (לדוגמה, גבישי קוורץ בשעונים דיגיטליים), שכן הם אינם רגישים להפרעות.

## רשימת מקורות


[1] Kleppner, D. & Kolenkow, R., *"An Introduction to Mechanics"* (Cambridge), second edition.
[2] Kittel, C., *"Mechanics"* (Berkeley Physics Course Vol. 1, McGraw-Hill);



תרגום לעברית על ידי האוניברסיטה הפתוחה




איור 4: הפונקציה $g(\omega)$ עבור $\gamma/\omega_0 = 0.3$.