מכניקה - הרצאה 12: סטטיקה

אסף פאר

16 ביוני 2020

1 מבוא

גוף סטטי הוא גוף שאינו בתנועה- כלומר נמצא בשיווי משקל. לעיתים קרובות, נושא הסטטיקה נלמד לפני נושא הדינמיקה, שכן הוא נחשב "פשוט" יותר. ואולם, לאחר שנתקלנו כבר במושגים כגון חיכוך סטטי, מרכז מסה ומומנט, נראה שניתן ביתר קלות לבחון בעיות סטטיות.

ניתן בהחלט להתבונן על מערכת סטטית כמקרה פרטי של מערכת דינמית. במערכת סטטית = מערכת הנמצאת בשיווי משקל, מתקיים:

(א) שהסכום הווקטורי של הכוחות הפועלים על המערכת מתאפס,

$$\sum \vec{F} = 0 \tag{1}$$

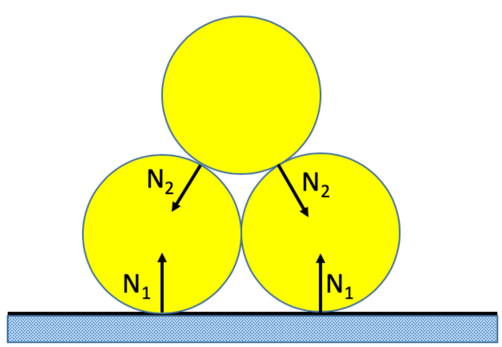
(ב) שסכום המומנטים הפועלים על הגוף מתאפס,

$$\sum \vec{T} = 0. \tag{2}$$

2 דוגמאות

2.1 שלושה גלילים

נתבונן במערכת המורכבת משלושה גלילים זהים, 2 מונחים על הרצפה ואחד עליהם (ראה איור 1). נרצה לחשב מה מקדם החיכוך המינימלי בין הגלילים לרצפה ובין הגלילים לבין עצמם המאפשר למערכת להיות בשיווי משקל.



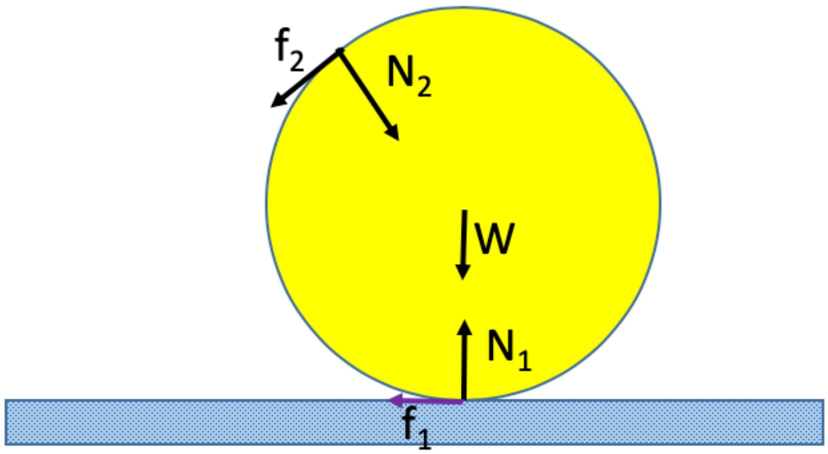
איור 1: שלושה גלילים זהים

לשם החישוב, נתבונן באחד הגלילים - למשל, הימני התחתון. נסמן את הכוחות הפועלים עליו (ראה איור 2). על הגליל פועלים 3 כוחות:

(1) כוח הכבידה, הפועל ממרכזו $W = mg$.

(2) הכוח שמפעילה הרצפה - מתחלק לכוח הנורמלי $N_1\hat{y}$ ולכוח החיכוך, $f_1 = \mu_1 N_1 \hat{x}$ מאחר שהכוח הנורמלי מתחלק בין 3 הגלילים, מטעמי סימטריה נקבל ש- $N_1 = \frac{3}{2}W$

(3) הכוח שמפעיל הגליל העליון על הגליל. שוב, נחלק אותו לרכיב רדיאלי N_2 (בכיוון מרכז הגליל) ולרכיב משיקי הנובע מהחיכוך, $f_2 = \mu_2 N_2$.



איור 2: הכוחות הפועלים על הגליל התחתון

מטעמי סימטריה, הרכיב האנכי של הכוח שמפעיל הגליל העליון שווה ל- $W/2$. לכן נקבל

$$N_2 \cos(30^\circ) + \mu_2 N_2 \sin(30^\circ) = \frac{W}{2} \tag{3}$$

(כאשר השתמשנו בסימטריה בכדי לקבוע את הזוויות).

משוואת הכוחות בציר האופקי:

$$N_2 \sin(30^\circ) - \mu_2 N_2 \sin(60^\circ) = \mu_1 N_1 \tag{4}$$

נציב $\sin(30^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}, \cos(30^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ונקבל

$$\begin{aligned} \tfrac{\sqrt{3}}{2}N_2 + \tfrac{\mu_2 N_2}{2} &= \tfrac{W}{2} \\ \tfrac{N_2}{2} - \tfrac{\sqrt{3}\mu_2 N_2}{2} &= \tfrac{3}{2}\mu_1 W \end{aligned} \tag{5}$$

המשוואה השלישית היא משוואת המומנטים. נבחר כציר את מרכז הגליל. המומנטים סביב מרכז הגליל חייבים להתאפס בשו"מ, ולכן

$$\mu_1 N_1 = \mu_2 N_2 \quad \rightarrow \quad N_2 = \frac{3}{2}\frac{\mu_1}{\mu_2}W \tag{6}$$

נציב במשוואה השניה, ונקבל

$$\frac{3}{2}\frac{\mu_1}{\mu_2}(1 - \sqrt{3}\mu_2) = 3\mu_1 \tag{7}$$

או

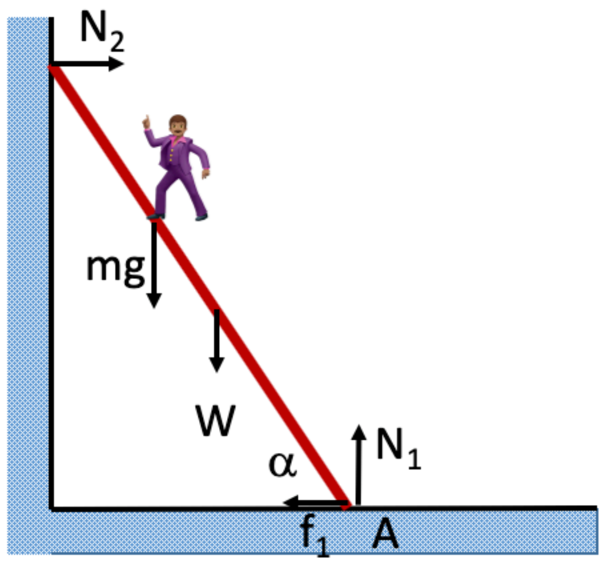
$$1 - \sqrt{3}\mu_2 = 2\mu_2 \quad \rightarrow \quad \mu_2 = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \tag{8}$$

ומהמשוואה הראשונה נקבל

$$N_2 = \frac{W}{2}\ , \qquad \mu_1 = \frac{\mu_2}{3} = \frac{2-\sqrt{3}}{3} \tag{9}$$

2.2 אדם מטפס על סולם

כדוגמה נוספת, נניח סולם בעל אורך l ומשקל W המונח בזווית α על הרצפה בצידו האחד, ובצידו השני נשען על קיר. נתון שמקדם החיכוך בין הסולם והרצפה הוא μ, וכן שאין חיכוך בין הסולם והקיר. עד איזה גובה יכול לטפס אדם בעל מסה m מבלי שהסולם יחליק?



איור 3: אדם מטפס על סולם

על הסולם פועלים 4 כוחות:

(1) כוח הכובד, W פועל ממרכז הסולם.

(2) הכוח שמפעילה הרצפה - מתחלק לכוח הנורמלי $N_1\hat{y}$ ולכח החיכוך, $f_1 = \mu N_1(-\hat{x})$.

(3) הכוח שמפעיל הקיר, $N_2\hat{x}$

(4) הכוח שמפעיל האיש, mg.

השוואת הכוחות בצירי x ו- y נותנת

$$N_2 = \mu N_1 \,, \qquad N_1 = W + mg. \tag{10}$$

משוואת המומנטים סביב הנקודה A:

$$W\frac{l}{2}\cos\alpha + mgx\cos\alpha = N_2 l\sin\alpha \tag{11}$$

או

$$x = \mu\frac{W+mg}{mg}l\tan\alpha - \frac{Wl}{2mg} \tag{12}$$

ובגבול בו האיש הרבה יותר כבד מהסולם, $W \gg mg$ נקבל

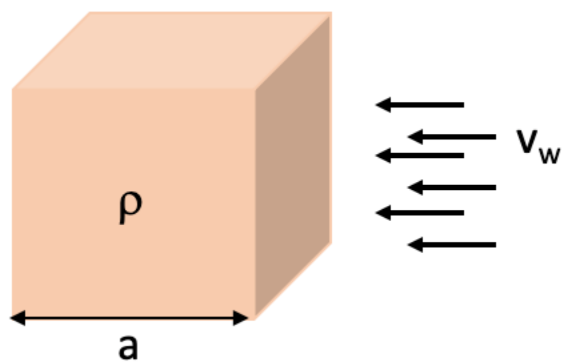
$$x \approx l\mu\tan\alpha$$

בגבול ההפוך - הסולם הרבה יותר כבד מהאיש (או שהאיש עדיין לא עלה על הסולם) נקבל את הזווית המינימלית בה יש להציב את הסולם,

$$\tan\alpha \geq \frac{1}{2\mu}.$$

2.3 כוחה של הרוח

הכוח שמפעילה הרוח על גוף פרופורציונלי לריבוע מהירות הרוח ולשטח האפקטיבי של הגוף: $F = kAv^2$ כש-k הוא קבוע הפרופורציה. נתון שרוח שמהירותה $v = 50\ \mathrm{m/s}$ (הוריקן בדרגה 2) יכולה להפוך קובית עץ שמסתה $50\ \mathrm{kg}$. מה מסתה המקסימלית של קוביית עץ שתוכל להפוך רוח במהירות $v = 100\ \mathrm{m/s}$ (הוריקן בדרגה 5) ?



איור 4: רוח פועלת על תיבת עץ

הבעיה ניתנת לפתרון משיקולים של מומנטים. נניח שאורך צד (מקצוע) הקוביה הוא a, והצפיפות שלה היא ρ. אזי

$$M = \rho a^3 \quad \to \quad a = \left(\frac{M}{\rho}\right)^{1/3}. \tag{13}$$

המומנט שמפעיל כוח הכובד סביב כל מקצוע הוא

$$T_g = Mg\left(\frac{a}{2}\right) = \rho\frac{a^4}{2}g \tag{14}$$

המומנט שמפעילה הרוח סביב כל מקצוע הוא

$$T_w = F_w\left(\frac{a}{2}\right) = ka^2V^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{ka^3v^2}{2} \tag{15}$$

על ספ התהפכות, המומנטים משתווים:

$$\rho\frac{a^4}{2}g = \frac{ka^3v^2}{2} \quad \to \quad v^2 = \left(\frac{\rho}{k}\right)ag \propto M^{1/3} \tag{16}$$

ומכאן ש-

$$M \propto v^6\ (!).$$

כלומר, קיבלנו שהמסה המקסימלית של קוביה שרוח יכולה להפוך פרופורציונלי למהירות הרוח בחזקה השישית (!). לכן, רוח מהירה פי 2 יכולה להפוך קוביה שמסתה גדולה פי $2^6 = 64$. לכן התשובה הסופית היא $M' = 50 * 64 = 3200\ \mathrm{kg}$. תוצאה זו מסבירה את ההרס הרב הנגרם על ידי רוחות עוצמתיות.

3 עקרון ארכימדס

כל גוף הנמצא בנוזל (כמו שחיין) מרגיש כוח ציפה, אשר כיוונו כלפי מעלה. מקורו של כוח העילוי הוא בעובדה שבנוזל קיים הפרש לחצים בעומקים השונים - כך שעל החלק התחתון של הגוף פועל לחץ חזק יותר מאשר על החלק העליון.

הלחץ מוגדר ככוח ליחידת שטח:

$$P = \frac{|F|}{A} \tag{17}$$

הלחץ עצמו הוא גודל סקלרי - כאשר הכוח הוא הכוח הנורמלי (אנך) ליחידת השטח.

כאשר גוף נמצא בתוך נוזל, הכוחות הפועלים עליו הם כוח הכבידה, $m\vec{g}$, והכוחות שמפעילה עליו הסביבה. זהו הסכום הווקטורי של הכוחות הפועלים על כל אלמנט שטח ΔA בכיוון אנך למשטח: $\Delta\vec{F} = P(\Delta A)\hat{n}$.

גם אם אנחנו לא יודעים את צורת הגוף (ולכן אין דרך פשוטה לחשב את הכוחות שמפעילה עליו הסביבה), ישנה דרך פשוטה לחשב את הכוחות הללו. נניח שהיינו מוציאים את הגוף מהנוזל. אזי נפחו היה נתפס ע״י הנוזל עצמו. הנוזל נמצא בשיווי משקל (במנוחה) עם סביבתו. לכן, הכוח הפועל על הנוזל שהחליף את הגוף (שנפחו V) שווה בדיוק למשקל הנוזל.

אבל זה בדיוק הכוח שפעל על הגוף המקורי. לכן, כוח העילוי שמרגיש גוף בנפח V שווה למשקל הנוזל שנפחו V. זהו **עקרון ארכימדס.**

אם צפיפות הגוף היא ρ_s, אזי מסת הגוף היא $m = \rho_s V$. מסת הנוזל היא $\rho_f V$ כש-ρ_f היא צפיפות הנוזל. לכן כוח הציפה הוא

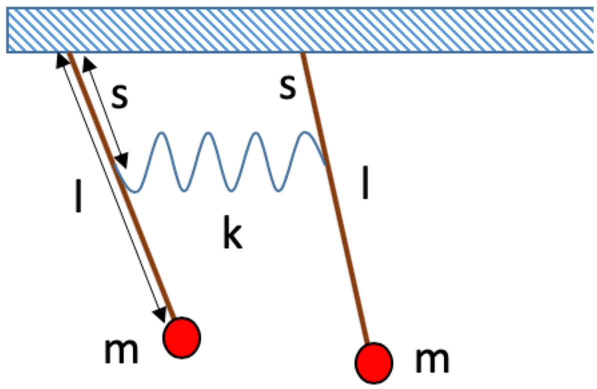
$$\vec{F} = \rho_f V\vec{g} - m\vec{g} = (\rho_f - \rho_s)V\vec{g} \tag{18}$$

כלומר, גופים אשר צפיפותם קטנה מזו של הנוזל $(\rho_s < \rho_f)$ ירגישו כוח כלפי מעלה. זה בדיוק המצב עבור קרח (מוצק) אשר צפיפותו קטנה מזו של מים נוזלים.

כמו כן, זה מסביר מדוע קל לצוף בים המלח: בעוד שצפיפות מים מתוקים היא כ- $\approx 1.0 \times 10^3$ kg m^{-3} צפיפות מי ים המלח היא כ- $\approx 1.24 \times 10^3$ kg m^{-3}, מה שהופך את הצלילה בהם לבלתי אפשרית ללא ציוד ייעודי.

4 בונוס: אופני תנודה נורמלים בתנודות מצומדות

נעבור כעת לנושא אחר- זה של תנודות מצומדות. תנודה מצומדת מתרחשת כאשר שני אוסצילטורים הרמונים משפיעים זה על זה, ויכולים להעביר אנרגיה זה לזה. דוגמה קלאסית היא זו ל שתי מטוטלות (נניח, זהות), המחוברות ביניהן עם קפיץ (ראה איור 5).



איור 5: מטוטלת מצומדת

נניח שלכל מטוטלת אורך l ומסה m, וכן שהמטוטלות נמצאות בזוויות θ_1, θ_2. כמו כן, נניח שהזוויות קטנות, כך שנוכל לקרב $\sin\theta_{1,2} \approx \theta_{1,2}$. משוואות התנועה של המטוטלות (ללא הקפיץ) הן

$$\begin{aligned} ml\ddot{\theta}_1 &= -mg\theta_1, \\ ml\ddot{\theta}_2 &= -mg\theta_2. \end{aligned} \tag{19}$$

כמובן, נסמן $\omega_0^2 = g/l$ ומשוואות התנועה יקבלו את הצורה $\ddot{\theta}_{1,2} + \omega_0^2\theta_{1,2} = 0$ עם הפתרון $\theta_{1,2} = A_{1,2}\sin(\omega_0 t + \phi_{1,2})$.

כעת, נניח שהמטוטלות מחוברות על ידי קפיץ, עם קבוע k. אנחנו בוחרים את המרחק בין המטוטלות כך שבמנוחה (כאשר המטוטלות אנכיות), הקפיץ רפוי. הקפיץ מחובר במרחק s מנקודת התליה, כך שכאשר המטוטלות נעות, הקפיץ נמתח באורך $s(\theta_1 - \theta_2)$. משוואות התנועה כעת הן

$$\begin{aligned} ml\ddot{\theta}_1 &= -mg\theta_1 - ks(\theta_1 - \theta_2), \\ ml\ddot{\theta}_2 &= -mg\theta_2 + ks(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned} \tag{20}$$

נחלק ב- ml ונשתמש בהגדרות $\omega_0^2 = g/l$ ו- $\kappa^2 = ks/ml$ ונקבל

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 + \kappa^2\theta_1 &= \kappa^2\theta_2, \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2\theta_2 + \kappa^2\theta_2 &= \kappa^2\theta_1. \end{aligned} \tag{21}$$

או

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + \Omega^2\theta_1 &= \kappa^2\theta_2, \\ \ddot{\theta}_2 + \Omega^2\theta_2 &= \kappa^2\theta_1. \end{aligned} . \tag{22}$$

כש- $\Omega^2 = \omega_0^2 + \kappa^2$.

מאחר שהתנועה מחזורית, נחפש פתרון מהצורה:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= A\sin(\omega t + \phi), \\ \theta_2(t) &= B\sin(\omega t + \phi). \end{aligned} \tag{23}$$

נשים לב, שהתלות בזמן של $\theta_{1,2}$ היא זהה, אחרת לא נוכל לקיים את משוואה 22.
נציב את הפתרון, ונקבל:

$$\begin{aligned}(\Omega^2-\omega^2)A=\kappa^2 B,\\ (\Omega^2-\omega^2)B=\kappa^2 A.\end{aligned} \tag{24}$$

נציב את A בין שתי המשוואות, ונקבל

$$(\Omega^2-\omega^2)^2=\kappa^4 \quad \to \quad \Omega^2-\omega^2=\pm\kappa^2 \tag{25}$$

נשתמש ב- $\Omega^2=\omega_0^2+\kappa^2$ בכדי לרשום

$$\begin{aligned}\omega_0^2+\kappa^2-\omega^2=\kappa^2,\\ \omega_0^2+\kappa^2-\omega^2=-\kappa^2.\end{aligned} \tag{26}$$

נקבל שני פתרונות:

$$\begin{aligned}&\omega^2=\omega_+^2=\omega_0^2+2\kappa^2 \qquad && A=-B;\\ &\omega^2=\omega_-^2=\omega_0^2 && A=B.\end{aligned} \tag{27}$$

כלומר, קיבלנו שלמערכת יש שתי דרכים להציג תנועה הרמונית פשוטה. בתדירות ω_+, המטוטלות נעות בכיוונים מנוגדים, עם אותה אמפליטודה. תדירות התנודה גדולה יותר מזו של מטוטלת יחידה, ω_0 כיוון שהמטוטלות מושכות אחת את השניה (או דוחפות).

בתדירות ω_-, המטוטלות נעות יחד עם אותה אמפליטודה ולאותו כיוון. הקפיץ לעולם לא מתכווץ, ולכן התדירות זהה לזו של מטוטלת יחידה.

שני אופני התנועה הללו ידועים כ **אופני תנועה נורמלים** (normal modes) של המערכת.

אם נרשום באופן ישיר, נקבל את שני אופני התנועה הנורמלים:

(א) $\omega_+=\sqrt{\omega_0^2+\kappa^2}$ ו- $\theta_1=-\theta_2$,

$$\begin{aligned}\theta_1(t)=A_+\sin(\omega_+t+\phi_+),\\ \theta_2(t)=-A_+\sin(\omega_+t+\phi_+)\end{aligned} \tag{28}$$

(ב) $\theta_1=\theta_2, \quad \omega_-=\omega_0$,

$$\begin{aligned}\theta_1(t)=A_-\sin(\omega_-t+\phi_-),\\ \theta_2(t)=A_-\sin(\omega_-t+\phi_-).\end{aligned} \tag{29}$$

משוואת התנועה היא לינארית, ולכן ניתן לחבר פתרונות בכדי למצוא פתרון חדש. לכן פתרון כללי הוא

$$\begin{aligned}\theta_1(t)=A_+\sin(\omega_+t+\phi_+)+A_-\sin(\omega_-t+\phi_-),\\ \theta_2(t)=-A_+\sin(\omega_+t+\phi_+)+A_-\sin(\omega_-t+\phi_-)\end{aligned} \tag{30}$$

כלומר, במקרה הכללי, לתנועת כל מטוטלת יש רכיב בתדירות של כל אופן נורמלי.

המטוטלות יכולות להעביר אנרגיה אחת לשניה. נניח, לדוגמה, שבזמן $t=0$ המטוטלת הראשונה מתחילה ממנוחה עם זווית $\theta_1(t=0)=\theta_0$, ואילו למטוטלת השניה מתקיים $\theta_2(t=0)=0$. כמובן, שבמצב זה, בזמן $t=0$ כל האנרגיה נמצאת במטוטלת הראשונה.

במקרה זה הפאזות הן $\phi_\pm=\pi/2$, ולכן משוואה 30 תרשם כ-

$$\begin{aligned}\theta_1(t)=A_+\cos(\omega_+t)+A_-\cos(\omega_-t),\\ \theta_2(t)=-A_+\cos(\omega_+t)+A_-\cos(\omega_-t).\end{aligned} \tag{31}$$

מתנאי ההתחלה, $\theta_1(t=0)=\theta_0\ ,\ \ \theta_2(t=0)=0$ נקבל $A_+=A_-=\theta_0/2$,

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \tfrac{\theta_0}{2}\left[\cos(\omega_+ t)+\cos(\omega_- t)\right],\\ \theta_2(t) &= \tfrac{\theta_0}{2}\left[-\cos(\omega_+ t)+\cos(\omega_- t)\right].\end{aligned} \tag{32}$$

כעת נגדיר $\bar\omega=(\omega_+ + \omega_-)/2$ ו- $\delta=(\omega_+ - \omega_-)/2$ כך שמתקיים $\omega_-=\bar\omega-\delta\ ,\ \ \omega_+=\bar\omega+\delta$. נשתמש בזהויות הטריגונומטריות $\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$ ו- $\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B$ בכדי לרשום

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \theta_0\cos(\delta t)\cos(\bar\omega t)\\ \theta_2(t) &= \theta_0\sin(\delta t)\sin(\bar\omega t).\end{aligned} \tag{33}$$

המערכת מתנודדת בתדירות ממוצעת $\bar\omega$, אבל האמפליטודות של האוסצילציות משתנות לאט בין המטוטלות בתדירות δ.