

# מכניקה - הרצאה 13: תנועה תחת השפעת כוח מרכזי

אסף פאר

14 ביוני 2020

## 1 מבוא

האסטרונום יוהנס קפלר היה עוזר המחקר של האסטרונום הדני טיכו ברהה. ביחד הם מדדו את מיקום כוכבי הלכת בשמיים בדיוק גבוה - ללא טלסקופ (שהומצא רק אחרי מותו). מניתוח הנתונים, קפלר מצא את שלושת חוקי תנועת כוכבי הלכת (הידועים בשם "חוקי קפלר").

1. כל כוכב לכת נע באליפסה, כשהשמש נמצאת באחד ממוקדי האליפסה.

2. הקו שמחבר את כוכב הלכת עם השמש מכסה שטחים שווים במרווחי זמן שווים (כשכוכב הלכת נמצא קרוב יותר לשמש הוא נע מהר יותר).

3. זמן המחזור  $T$  של סיבוב הכוכב סביב השמש קשור לציר הראשי של האליפסה  $A$  ע"י הנוסחה  $T^2 = kA^3$  כש- $k$  הוא קבוע לכל כוכבי הלכת.

חוקי קפלר נוסחו על סמך אנליזה של תצפיות - לפיכך הם **חוקים אמפיריים**. כמה עשרות שנים מאוחר יותר, הם שימשו בסיס לניוטון שפיתח את משוואות התנועה מחוק הכבידה האוניברסלי - ובכך הצליח להסביר בצורה מתימטית את חוקי קפלר - ובזאת נפתח הפתח לפיסיקה המודרנית.

תנועת כוכבי הלכת מהווה דוגמה ספציפית לתנועה בהשפעת כוח מרכזי -  $\vec{F} = f(r)\hat{r}$  (בדוגמה הזאת  $f(r) \propto 1/r^2$ ). בפיסיקה המודרנית ישנן דוגמאות חשובות רבות נוספות - פיזור של חלקיקים, פיסיקה אטומית ועוד. כאן נתח את התנועה.

## 2 תנועת בהשפעת כוח מרכזי כתנועת חלקיק יחיד

נניח מערכת מבודדת הכוללת שני גופים בעלי מסות  $m_1, m_2$  המבצעים אינטרקציה תחת כוח מרכזי,  $f(r)\hat{r}$ . מיקום הגופים -  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ . נרשום את ווקטור המרחק בין הגופים -

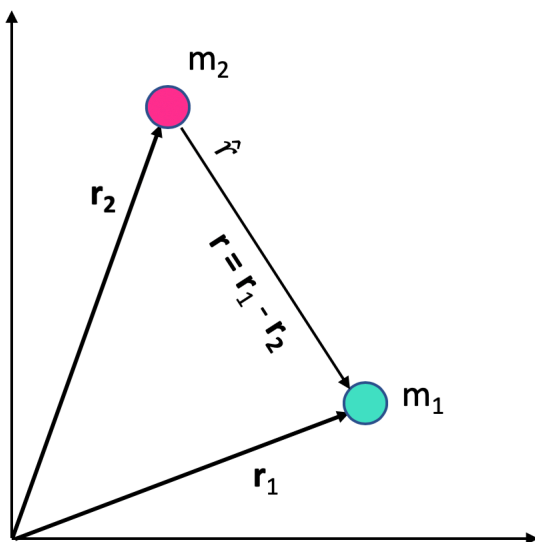
$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (1)$$

ומכאן

$$r = |\vec{r}| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|.$$

(ראה איור 1). משוואות התנועה של הגופים:

$$\begin{aligned} m_1 \vec{\ddot{r}}_1 &= f(r)\hat{r} \\ m_2 \vec{\ddot{r}}_2 &= -f(r)\hat{r}. \end{aligned} \quad (2)$$



איור 1: שני גופים במערכת מבודדת

משוואות התנועה מצומדות ע"י  $\vec{r}$ : השינוי ב-  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  תלוי ב-  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ . לכן, ניתוח של הבעיה הופך לפשוט יותר אם במקום המשתנים  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  נעבור למשתנים חדשים -  $\vec{r}, \vec{R}_{cm}$  כאשר מיקום מרכז המסה נתון ע"י

$$\vec{R}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

בהעדר כוחות חיצוניים, משוואת התנועה של  $\vec{R}_{cm}$  היא טריוויאלית, או  $\vec{R}_{cm} = 0$

$$\vec{R}_{cm} = \vec{R}_0 + \vec{v}_{cm} t$$

כמובן ש-  $\vec{R}_0, \vec{v}_{cm}$  תלויים בבחירת תנאי ההתחלה ובבחירת מערכת הקואורדינטות. כמובן שנוח לבחור את מרכז מערכת הקואורדינטות ב-  $\vec{R}_0 = 0$  כך ש-  $\vec{R}_0 = 0$ . אם המרכז הוא סטציונרי, אזי  $\vec{v}_{cm} = 0$ . על מנת למצוא את משוואת התנועה ל-  $\vec{r}$ , נחלק את משוואה 2 (עליונה) ב-  $m_1$ , את התחתונה ב-  $m_2$  ונחסיר. נקבל:

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) f(r) \hat{r} \quad (4)$$

כעת נשתמש ב-  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  ונגדיר את המסה המצומצמת  $\mu$ ,

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \leftrightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (5)$$

ונרשום את משוואה 4 כ-

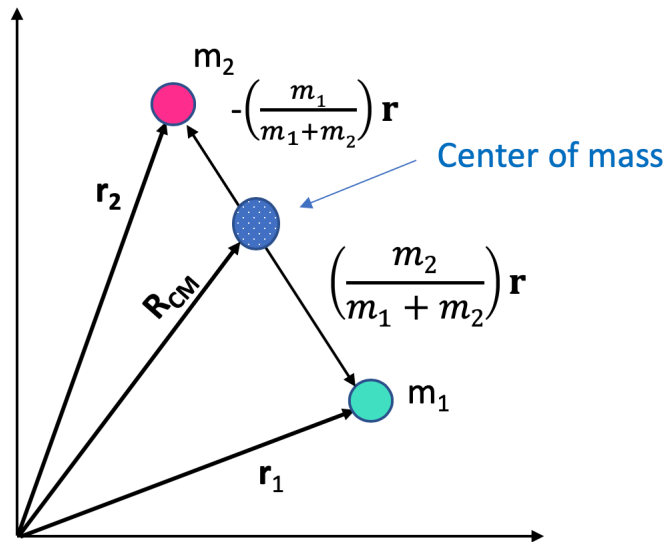
$$\mu \vec{r} = f(r) \hat{r} \quad (6)$$

כלומר: קיבלנו משוואת תנועה לחלקיק יחיד בעל מסה  $\mu$  הנע - במימד יחיד  $r$ , עקב כוח  $f(r) \hat{r}$ . הצלחנו להפוך בעיית תנועה של 2 גופים לבעיית תנועה של "גוף" יחיד.

האסטרטגיה מכאן והלאה ברורה: נפתור את משוואת התנועה עבור  $\vec{r}$  ו-  $\vec{R}_{cm}$  ונשתמש במשוואות 1, 2 כדי למצוא את  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ ,

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{R}_{cm} + \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right) \vec{r}, \\ \vec{r}_2 &= \vec{R}_{cm} - \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) \vec{r}.\end{aligned}\quad (7)$$

כש-  $\vec{r}$  ו-  $\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right) \vec{r}$  הם ווקטורי המיקום של הגופים  $m_2, m_1$  ביחס למרכז המסה (ראה איור 2).



איור 2: מיקום הגופים בקואורדינטות  $\vec{r}, \vec{R}_{cm}$ .

### 3 תכונות אוניברסליות של תנועה בהשפעת כוח מרכזי

כמובן שעל מנת לפתור את משוואת התנועה (משוואה 6) נדרש לקבוע את הכוח - הפונקציה  $f(r)$ . ואולם, ישנן כמה תכונות כלליות לתנועה, שאינן תלויות בכוח הספציפי ונובעות מחוקי השימור הכלליים שלמדנו - חוק שימור התנע הזוויתי וחוק שימור האנרגיה.

#### 3.1 שימור תנע זוויתי

הכוח המרכזי,  $f(r)\hat{r}$  פועל לאורך הווקטור  $\vec{r}$  המקשר בין שני הגופים. משכך, הוא לא יכול להפעיל מומנט על הגופים. לכן, התנע הזוויתי  $\vec{L}$  נשמר - הן בגודל והן בכיוון. מכאן מתקבלות מיד שתי תכונות חשובות.

**א. התנועה מוגבלת למישור.** כיוון ש-  $\vec{L} = \vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}}$ , נובע מיד ש-  $\vec{r}$  אנך ל-  $\vec{L}$ . כיוון שכיוונו של  $\vec{L}$  קבוע, מישור התנועה גם כן קבוע - ואנך לכיוונו של הווקטור  $\vec{L}$ .

**ב. חוק השטחים השווים של קפלר.** כפי שהראינו, אם נרשום  $\vec{r} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$  נקבל שגודל ווקטור התנע הזוויתי הוא

$$L = |\vec{L}| = |\vec{r} \times \mu(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})| = \mu r^2 \dot{\theta},$$

שמוכיל מיד לחוק השטחים השווים (החוק השני של קפלר. ראה הרצאה 9 - תנע זוויתי).

חוק השטחים השווים תקף הן למסלולים סגורים (כדוגמת מסלולי כוכבי לכת) והן למסלולים פתוחים (כלומר, שמתחילים ומסתיימים באינסוף, כדוגמת מסלולי שביטים מסויימים).

### 3.2 חוק שימור האנרגיה

את האנרגיה הקינטית המשווייכת לתנועה נרשום כ-

$$E_k = \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\mu (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})^2 = \frac{1}{2}\mu (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2). \quad (8)$$

כמו כן, הוכחנו שכל הכוחות המרכזיים הם משמרים, ולכן ניתן להגדיר פוטנציאל,

$$U(r) - U(r_0) = - \int_{r_0}^r f(r) dr \quad (9)$$

כיוון שלקבוע  $U(r_0)$  אין משמעות פיסיקלית (הוספת קבוע לאנרגיה לא משנה את התנועה) נוכל לקחת אותו ל-0. ממשפט העבודה- אנרגיה, נקבל:

$$E = E_k + U(r) = \frac{1}{2}\mu (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) = Const. \quad (10)$$

נשתמש ב-  $L = \mu r^2\dot{\theta}$  בכדי לרשום

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2} + U(r) \quad (11)$$

משוואה 11 נראית דומה מאוד למשוואת אנרגיה של גוף הנע בפוטנציאל חד מימדי. אין יותר תלות בזווית  $\theta$ . נוכל להמשיך באנלוגיה על ידי הצגת הפוטנציאל האפקטיבי,  $U_{eff}$  שמוגדר כ-

$$U_{eff}(r) \equiv \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2} + U(r) \quad (12)$$

וכך לרשום את האנרגיה כ-

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{eff}(r) \quad (13)$$

נשים לב, שהפוטנציאל האפקטיבי  $U_{eff}$  שונה מהפוטנציאל הרגיל  $U(r)$  באיבר  $L^2/2\mu r^2$ . איבר זה נקרא הפוטנציאל הצנטריפוגלי. כמובן שלאיבר הזה אין שום קשר לפוטנציאל - הוא למעשה קשור לאנרגיה הקינטית הקשורה לתנועה האנכית,  $r\dot{\theta}$ . ואולם, חיבור של האיבר לפוטנציאל מאפשר טיפול מתימטי פשוט המשוואת התנועה, ושימוש בדיאגרמת האנרגיה לתיאור התנועה תחת כוח מרכזי.

### 3.3 פתרון פורמלי למשוואות התנועה תחת כוח מרכזי

נרשום את משוואה 13 כ-

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U_{eff}(r))} \quad (14)$$

נבצע הפרדת משתנים, בכדי לרשום

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U_{eff}(r))}} = t - t_0 \quad (15)$$

באופן עקרוני, משוואה 15 נותנת את  $r$  כפונקציה של הזמן  $t$ , למרות שמעשית האינטגרל עשוי להיות די מעצבן (אבל ניתן תמיד לפתרון נומרי). כדי למצוא את הזווית, נרשום

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \rightarrow \theta - \theta_0 = \frac{L}{\mu} \int_{t_0}^t \frac{dt}{r^2} \quad (16)$$

כיוון ש-  $r(t)$  עקרונית ידוע מפתרון משוואה 15. לעיתים אנחנו מעוניינים במסלול הגוף, כלומר  $r(\theta)$  (גם כאשר במסלול אינו סגור). נשתמש בכלל השרשרת במשוואות 14, 16 בכדי לרשום:

$$\frac{d\theta}{dr} = d\theta dt \frac{dt}{dr} = \frac{L}{\mu r^2} \sqrt{\frac{\mu}{2(E - U_{eff}(r))}} \quad (17)$$

עם פתרון פורמלי

$$\theta - \theta_0 = L \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - U_{eff}(r))}} \quad (18)$$

## 4 משוואת האנרגיה ודיאגרמת האנרגיה

משוואה 13 היא משוואת תנועה בכיוון יחיד- הכיוון הרדיאלי. לכן, נוכל להשתמש בדיאגרמת האנרגיה שפיתחנו (ראה הרצאה 8) על מנת לתאר את התנועה באופן איכותי. נסתכל על הדוגמה החשובה של כוח הכבידה,

$$f(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

מתקיים

$$U(\infty) - U(r) = - \int_r^\infty f(r) dr = Gm_1m_2 \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Gm_1m_2}{r} \quad (19)$$

ואם נשתמש בהגדרה המקובלת,  $U(\infty) = 0$ , נקבל

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} \quad (20)$$

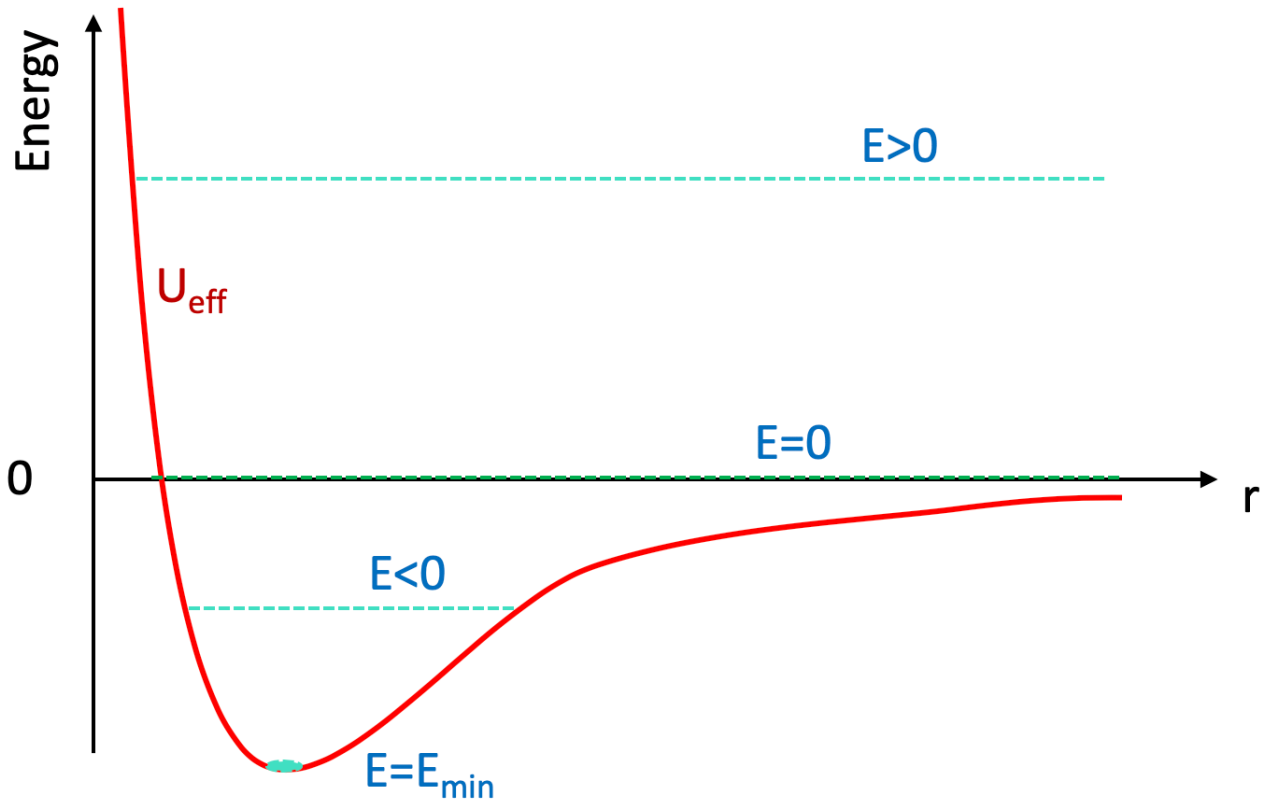
לכן הפוטנציאל האפקטיבי הוא

$$U_{eff} = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{Gm_1m_2}{r}. \quad (21)$$

נניח כעת ש-  $L \neq 0$ . ברדיוסים קטנים, הפוטנציאל הצנטריפוגלי,  $L/2\mu r^2$  - חיובי ולכן דוחה, דומיננטי. לעומת זאת ברדיוסים גדולים, פוטנציאל הכבידה - שלילי ולכן מושך דומיננטי. בגבול  $r \rightarrow \infty$  מתקיים  $U_{eff}(r \rightarrow \infty) = 0$ . איור של הפוטנציאל מופיע באיור 3.

האנרגיה הקינטית המשוויכת לתנועה הרדיאלית,  $E_k = E - U_{eff}$  חייבת להיות חיובית. כלומר, תנועה אפשרית רק באזור בו  $E_k \geq 0$ . האנרגיה הכללית קובעת את אופי התנועה:

1.  $E > 0$ . הרדיוס  $r$  אינו תחום (מוגבל) בערכים גדולים, אבל כן יש לו ערך מינימלי עבור  $L \neq 0$ . הגופים השונים לא יכולים להתנגש עקב "המחסום הצנטריפוגלי". כפי שנראה בהמשך, תנועת הגופים מתוארת ע"י היפרבולה.



איור 3: פוטנציאל אפקטיבי של תנועה בשדה כבידה

2.  $E = 0$  מקרה זה דומה למקרה (1) למעלה, אבל הוא על הגבול בין מסלול תחום ולא תחום. תנועת הגופים מתוארת ע"י פרבולה.
3.  $E < 0$  התנועה חסומה ברדיוסים גבוה ונמוך. תנועת הגופים מתוארת ע"י אליפסה.
4.  $E = E_{\min}$  הרדיוס  $r$  יכול לקבל ערך יחיד - הגופים נמצאים במרחק קבוע אחד מהשני (התנועה היא מעגלית). קיימת גם אפשרות נוספת - זו ש-  $L = 0$ . במקרה זה, הגופים מאיצים אחד לקראת השני בקו ישר עד להתנגשות, כיוון שאין "מחסום צנטריפוגלי" שמונע מהם להתנגש.

## 5 תנועת כוכבי לכת

כעת נפתור את הבעיה המרכזית - תנועת כוכב לכת בעל מסה  $m$  סביב כוכב בעל מסה  $M$ . בין הכוכבים פועל כוח הכבידה, המוגדר ע"י הפוטנציאל במשוואה 20,

$$U(r) = -G \frac{Mm}{r} \equiv -\frac{C}{r}$$

כש-  $C \equiv GMm$ . כמובן שהתוצאות לא מוגבלות לתנועת כוכבי לכת - הן נכונות גם לתנועת כדור הארץ והירח, תנועת לוויין סביב כדור הארץ, תנועה של כוכבים בינאריים וכו'. כל בעיה שבה מופיע כוח הכבידה.

נכניס את הפוטנציאל (משוואות 20, 21) לתוך משוואת המסלול (משוואה 18), ונקבל

$$\theta - \theta_0 = L \int_{r_0}^r \frac{dr}{r \sqrt{2\mu E r^2 + 2\mu C r - L^2}} \quad (22)$$

כאשר  $\theta_0$  הוא קבוע אינטגרציה (נקבע לפי תנאי התחלה). האינטגרל אומנם מורכב אבל פתיר. אני מביא את הפתרון המלא בנספח. הפתרון הוא

$$r = \frac{L^2/\mu C}{1 - \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu C^2}} \sin(\theta - \theta_0)} \quad (23)$$

נוח לקחת כתנאי התחלה  $\theta_0 = -\pi/2$  וכן להגדיר:

$$r_0 \equiv \frac{L^2}{\mu C} \quad (24)$$

$$\epsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu C^2}} \quad (25)$$

עם הגדרות אלה, משוואה 23 הופכת ל-

$$r = \frac{r_0}{1 - \epsilon \cos \theta}. \quad (26)$$

הגודל חסר היחידות  $\epsilon$  נקרא **האקסצנטריות** ומאפיין את צורת המסלול. ל- $r_0$  יש כמובן יחידות של מרחק. את משוואה 26 נרשום בקואורדינטות קרטזיות, תוך שימוש ב- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $x = r \cos \theta$ . נקבל

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \epsilon x = r_0 \quad (27)$$

או

$$(1 - \epsilon^2)x^2 - 2r_0\epsilon x + y^2 = r_0^2 \quad (28)$$

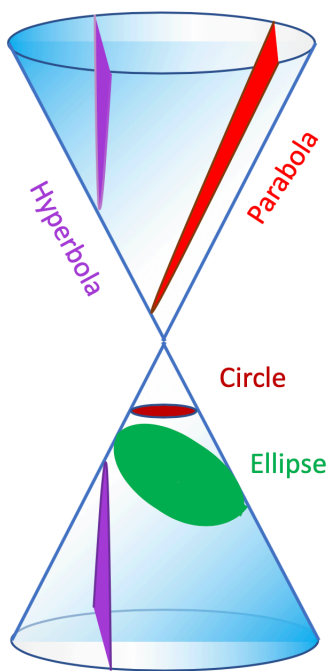
משוואה 28 מתארת חתכי קונוס: היפרבולה, פרבולה, אליפסה ומעגל (ראה איור 4). צורת המסלולים תלויה ב- $\epsilon$ , ומכאן באנירגיה,  $E$ :

1.  $E > 0 \leftrightarrow \epsilon > 1$ : התנועה היא לא חסומה. ממשוואה 28 עולה שהמקדמים של  $x^2$  ו- $y^2$  שונים בגדלם והפוכים בסימונם. כלומר, למשוואה הצורה הכללית  $y^2 - Ax^2 - Bx = Const$  - זוהי משוואת **היפרבולה**.

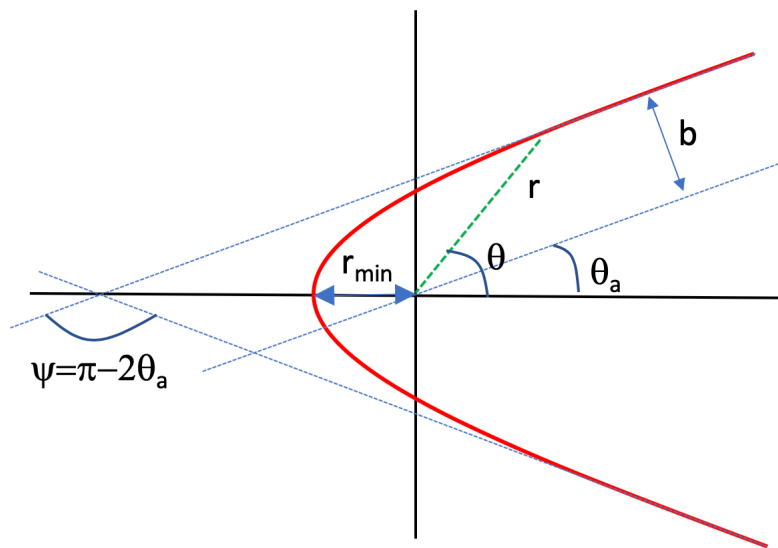
2.  $E = 0 \leftrightarrow \epsilon = 1$ : משוואה 28 מקבלת את הצורה  $x = y^2/(2r_0) - r_0/2$  - זוהי משוואת **פרבולה**.

3.  $-\mu C^2/2L^2 \leq E < 0 \leftrightarrow 0 \leq \epsilon < 1$ : המערכת חסומה. המקדמים של  $x^2$  ו- $y^2$  שונים, אבל עם סימן זהה - משוואה 28 מקבלת את הצורה  $y^2 + Ax^2 - Bx = const$ . זוהי משוואת **אליפסה**. כיוון שיש איבר לינארי ב- $x$ , המרכז הגיאומטרי של האליפסה הוא לא ב- $x = 0$ . אחד ממוקדי האליפסה הוא במרכז המסה (נוכח בהמשך).

4.  $E = -\mu C^2/2L^2 \leftrightarrow \epsilon = 0$  (זהו הערך המינימלי האפשרי לאנרגיה). משוואה 28 הופכת ל- $x^2 + y^2 = r_0^2$  - זו כמובן משוואת **מעגל**, והתנועה היא עם רדיוס קבוע,  $r = const$ .



איור 4: תנועת גוף בשדה כבידה מתוארת ע"י חתכים של קונוס: ביפרבולה, פרבולה, אליפסה ועיגול.



איור 5: הפרמטרים השונים המאפיינים מסלול היפרבולי.

## 5.1 מסלולים פתוחים - מסלולים היפרבולים

מסלולים היפרבוליים מאפיינים תנועה לא חסומה, כדוגמה דוגמת שבטים החודרים למערכת השמש ויוצאים ממנה. לחלופין, זו תנועה שמאפיינת בעיות פיזור - הכוח החשמלי פועל גם הוא כ-  $\propto r^{-2}$  בדומה לכוח הכבידה, ולכן בעיות



של פיזור חלקיקים טעונים מתאפיינות במסלולים היפרבוליים גם הם. נסמן את מהירותו של גוף העל מסה  $\mu$  רחוק מהראשית כ-  $v_0$ . נסמן את המרחק ההמינימלי של הכיוון המקורי שלו מהראשית כ-  $b$ . הפרמטר  $b$  נקרא **פרמטר הפגיעה** (באנגלית: Impact parameter). תיאור הפרמטרים השונים המאפיינים את התנועה מופיע באיור 5. התנע הזוויתי  $L$  והאנרגיה  $E$  נתונים ע"י:

$$L = \mu v_0 b$$

$$E = \frac{1}{2} \mu v_0^2 \rightarrow L^2 = 2\mu_0 E b^2$$

נרשום את  $r_0$  ו- $\epsilon$  (משוואות 24, 25) כ-

$$r_0 = \frac{L^2}{\mu C} = \frac{\mu v_0^2 b^2}{C} = \frac{2Eb^2}{C},$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu C^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{C}\right)^2}$$

משוואת המסלול נתונה ע"י משוואה 26,

$$r = \frac{r_0}{1 - \epsilon \cos \theta}$$

כאשר  $r = r_{\min}$ ,  $\theta = \pi$  הנתון ע"י

$$r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \epsilon} = \frac{\frac{2Eb^2}{C}}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{C}\right)^2}}$$

ועבור  $E \rightarrow \infty$  מתקיים  $r_{\min} \rightarrow b$ . מכאן ש-  $0 < r_{\min} < b$ . את (מחצית) הזווית בין האסימפטוטות נמצא ע"י לקיחת הגבול  $r \rightarrow \infty$  במשוואת המסלול 26,

$$\cos \theta_a = \frac{1}{\epsilon}. \quad (29)$$

בבעית פיזור, החלקיק מתפזר בזווית  $2\theta_a$ . בפיסיקה אטומית,  $\psi$  נקראת **זווית הפיזור**. מכאן נקבל ש

$$\cos \theta_a = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2} \right) = \sin \left( \frac{\psi}{2} \right) = \frac{1}{\epsilon}.$$

מכאן עולה שעבור  $(2Eb/C)^2 \ll 1$ , זווית הפיזור  $\psi \rightarrow 180^\circ$ .

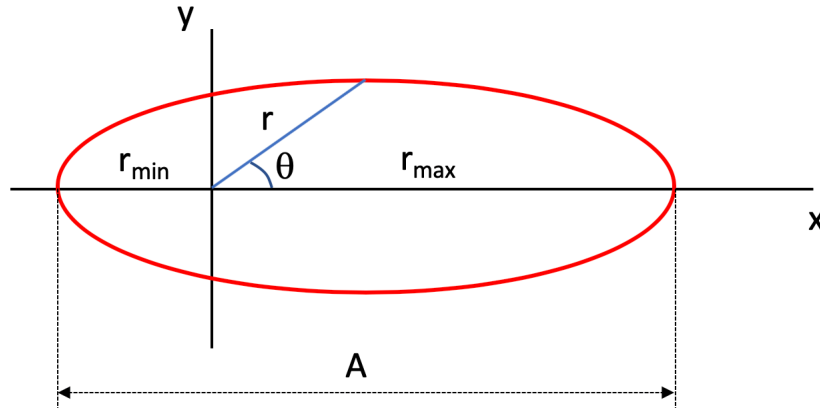
## 6 מסלולים אליפטיים ותנועת כוכבי לכת

עבור מסלולים אליפטיים, מתקיים  $0 \leq \epsilon < 1 \leftrightarrow E < 0$ . ממשוואה 28,

$$(1 - \epsilon^2)x^2 - 2r_0\epsilon x + y^2 = r_0^2$$

רואים שהאליפסה היא סימטרית סביב ציר  $x$ . כמו כן, קיומו של איבר לינארי ב-  $x$  משמעותו שמרכז האליפסה אינו ב-  $x = 0$ . בנספח ב' נוכיח שאחד ממוקדי האליפסה נמצא במרכז המסה. מכאן שבמערכת השמש, השמש נמצאת באחד המוקדים (שכן מסת השמש הרבה יותר גדולה מזו של כל אחד מכוכבי הלכת) - בהתאם לחוקי קפלר. אורך הציר הראשי הוא (ראה איור 6)

$$A = r_{\min} + r_{\max} = r_0 \left( \frac{1}{1 + \epsilon} + \frac{1}{1 - \epsilon} \right) = \frac{2r_0}{1 - \epsilon^2} \quad (30)$$



איור 6: הפרמטרים השונים המאפיינים מסלול אליפטי.

נשתמש במשוואות 24, 25 על מנת לבטא את  $r_0, \epsilon$  באמצעות  $L, \mu, E, C$  ונקבל

$$A = \frac{2r_0}{1 - \epsilon^2} = \frac{\frac{2L^2}{\mu C}}{1 - \left(1 + \frac{2EL^2}{\mu C^2}\right)} = \frac{C}{(-E)} \quad (31)$$

כלומר, קיבלנו שאורך הציר הראשי אינו תלוי ב- $L$ , אלא רק באנרגיה. נציב את התוצאה  $E = -C/A$  במשוואת האנרגיה (משוואה 8, שנרשום בצורה  $E = \frac{1}{2}\mu v^2 + U(r) = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{C}{r}$ ), ונקבל

$$v^2 = \frac{2C}{\mu} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{A} \right). \quad (32)$$

משוואה 32 נותנת את המהירות המסלולית  $v$  (המהירות הרדיאלית + המשיקית) בכל רדיוס  $r$  נתון לאורך המסלול.

## 6.1 זמן המחזור בתנועה אליפטית

הגישה הישירה היא לבצע אינטגרציה של משוואת המסלול (משוואה 15). נרשום

$$U_{eff} = \frac{L^2}{2\mu r^2} - C/r$$

ונקבל

$$t_b - t_a = \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E - \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{C}{r} \right)}} = \mu \int_{r_a}^{r_b} \frac{r dr}{\sqrt{2\mu E r^2 + 2\mu C r - L^2}} \quad (33)$$

מטבלאות אינטגרלים נקבל

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \sin^{-1} \left( \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right)$$

כשהאינטגרל השני נכון עבור  $a < 0$ .  
נציב, ונזכור ש-  $E < 0$  ונקבל

$$t_b - t_a = \frac{\sqrt{2\mu E r^2 + 2\mu C r - L^2}}{2E} \Big|_{r_a}^{r_b} + \left( \frac{\mu C}{2E} \right) \frac{1}{\sqrt{-2\mu E}} \sin^{-1} \left( \frac{2\mu E r + \mu C}{\sqrt{\mu^2 C^2 + 2\mu E L^2}} \right) \Big|_{r_a}^{r_b} \quad (34)$$

עבור מחזור שלם, מתקיים  $t_b - t_a = T$ , וכמו כן  $r_b = r_a$ . לכן האיבר הראשון מצד ימין נעלם ( $r_b = r_a$ ) ואילו ה-  
 $\sin^{-1}$  תורם  $2\pi$  (או  $-2\pi$  כפי שנניח כאן). סה"כ נקבל

$$T = \left( \frac{\mu C}{-E} \right) \frac{1}{\sqrt{-2\mu E}} \quad (35)$$

או

$$T^2 = \frac{\pi^2 \mu C^2}{-2E^3} \quad (36)$$

ונציב  $E = -C/A$ ,

$$T^2 = \frac{\pi^2 \mu}{2C} A^3 \quad (37)$$

זהו כמובן חוק השטחים השווים של קפלר,  $T^2 = kA^3$ , כאשר  $k$  הוא קבוע לכל כוכבי הלכת. תצפיות מדוייקות מראות שלמרות גודל האליפסה של מסלולי כוכבי הלכת השונים משתנה בפקטור  $\approx 100$ , היחס  $A^3/T^2$  משתנה בלא יותר מ- 0.05%.

## 6.2 אקסצנטריות המסלולים

עבור אליפסות, היחס בין  $r_{\max}$  ל-  $r_{\min}$  הוא

$$\frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{r_0/(1 - \epsilon)}{r_0(1 + \epsilon)} = \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}. \quad (38)$$

עבור  $\epsilon \approx 0$  מתקיים  $r_{\max}/r_{\min} \approx 1$ , והאליפסה הופכת לעיגול (ראה איור 7). עבור המסלולים של רוב כוכבי הלכת, זה אכן המצב - לדוגמה, עבור מסלול כדור הארץ,  $\epsilon_{\text{earth}} = 0.017$ . למאדים יש את האקסצנטריות הגבוהה ביותר מבין כוכבי הלכת שקל למדוד את מסלולם -  $\epsilon_{\text{mars}} = 0.093$ , ואכן קפלר ביסס את חוקיו בעיקר על תצפיות במסלולו של מאדים.

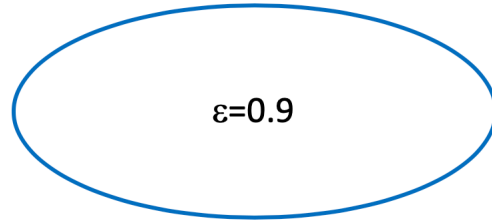
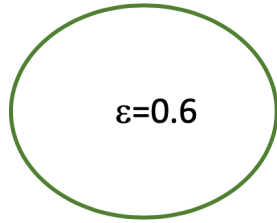
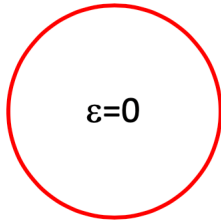
### דוגמה: מסלול גיאוסטציונרי.

לוויני תקשורת נמצאים לרוב במסלולים גיאוסטציונריים. אלה מסלולים שבהם מהירות סיבוב הלוויין סביב כדור הארץ היא בדיוק 24 שעות, כך שהלוויין "נמצא" כל הזמן מעל אותה הנקודה בשמיים (כמובן, חייב להיות מעל קו המשווה), דבר שהוא שימושי מאוד להעבר תקשורת. עבור לוויין במסה  $m$  נקבל  $\mu \approx m$ ,  $A = 2r$ ,  $C = GmM_E = gmR_E^2$ ,  $g = GM_E/R_E^2$  (וכן  $v = r\Omega_E$  לכן ממשוואה 32,

$$v^2 = (r\Omega_E)^2 = \frac{2C}{m} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2r} \right) \rightarrow r^3 = \frac{C}{m\Omega_E^2} = \frac{gR_E^2}{\Omega_E^2} \quad (39)$$

המהירות הזוויתית של סיבוב כדור הארץ היא  $\Omega_E = 2\pi/86400 \text{ rad/s}$ , ורדיוס כדור הארץ הוא  $R_E = 6400 \text{ ק"מ}$ , ומכאן

$$r \approx 42,250 \text{ km}$$



איור 7: האקסצנטריות קובעת את צורת האליפסה.

כלומר, גובה הלווין מעל פני כדור"א הוא

$$h = r - R_E = 35,850 \text{ km}$$

ומהירותו היא

$$v = r\Omega_E = 3070 \text{ m/s.}$$

### א' נספח א': פתרון משוואת המסלול

כתבנו את משוואת המסלול (משוואה 22),

$$\theta - \theta_0 = L \int_{r_0}^r \frac{dr}{r \sqrt{2\mu E r^2 + 2\mu C r - L^2}}$$

נבצע החלפת משתנה:

$$r = \frac{1}{s-a} \rightarrow dr = -\frac{ds}{(s-a)^2} \rightarrow \frac{dr}{r} = -\frac{ds}{(s-a)}$$

כאשר  $a$  הוא קבוע שאת ערכו נקבע מיד. נציב באינטגרל, ונקבל

$$\begin{aligned} \theta - \theta_0 &= -L \int \frac{ds}{(s-a) \sqrt{\frac{2\mu E}{(s-a)^2} + \frac{2\mu C}{s-a} - L^2}} \\ &= -L \int \frac{ds}{\sqrt{2\mu E + 2\mu C(s-a) - L^2(s-a)^2}} \\ &= -L \int \frac{ds}{\sqrt{2\mu E + 2\mu C s - 2\mu C a - L^2 s^2 + 2L^2 a s - L^2 a^2}} \end{aligned} \quad (40)$$

נבחר את  $a$  כך שיאפס את האיבר הליניארי, ב- $s$ , כלומר  $a = -\mu C / L^2$ . נקבל

$$\begin{aligned} \theta - \theta_0 &= -L \int \frac{ds}{\sqrt{2\mu E - 2\mu C a - L^2 s^2 - L^2 a^2}} \\ &= -L \int \frac{ds}{\sqrt{2\mu E + \frac{\mu^2 C^2}{L^2} - L^2 s^2}} \\ &= -L^2 \int \frac{ds}{\sqrt{2\mu E L^2 + (\mu C)^2 - L^4 s^2}} \end{aligned} \quad (41)$$

זהו אינטגרל סטנדרטי, מהצורה

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \sin^{-1} \left( \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right)$$

נציב ונקבל

$$\theta - \theta_0 = -\sin^{-1} \left( \frac{sL^2}{\sqrt{2\mu EL^2 + (\mu C)^2}} \right) \rightarrow \sin(\theta - \theta_0) = -\frac{sL^2}{\sqrt{2\mu EL^2 + (\mu C)^2}} \quad (42)$$

נציב,  $s = (1/r) + a = (1/r) - \mu C/L^2$ , ונקבל

$$\sin(\theta - \theta_0) = \frac{\mu C - L^2/r}{\sqrt{2\mu EL^2 + (\mu C)^2}} \quad (43)$$

לבסוף, נפתור עבור  $r$ :

$$\frac{L^2}{r} = \mu C - \sqrt{2\mu EL^2 + (\mu C)^2} \sin(\theta - \theta_0) \quad (44)$$

$$r = \frac{L^2}{\mu C - \sqrt{2\mu EL^2 + (\mu C)^2} \sin(\theta - \theta_0)} = \frac{\frac{L^2}{\mu C}}{1 - \sqrt{1 + \frac{2\mu EL^2}{\mu C}} \sin(\theta - \theta_0)} \quad (45)$$

שזו התוצאה שמופיעה במשוואה 23.

## ב' נספח ב': תכונות אליפסה

משוואת אליפסה בקואורדינטות קוטביות היא

$$r = \frac{r_0}{1 - \epsilon \cos \theta}$$

נעבור לקואורדינטות קרטזיות,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , ונקבל

$$(1 - \epsilon^2)x^2 - 2r_0\epsilon x + y^2 = r_0^2$$

זוהי משוואת אליפסה, כל עוד  $0 \leq \epsilon < 1$ . האליפסה סימטרית לסיבוב סביב ציר  $x$ , אבל מרכזה לא נמצא בראשית הצירים.

הערך המקסימלי של  $r$  הוא עבור  $\theta = 0$ ,

$$r_{\max} = \frac{r_0}{1 - \epsilon}$$

ואילו הערך המינימלי של  $r$  מתקבל עבור  $\theta = \pi$ ,

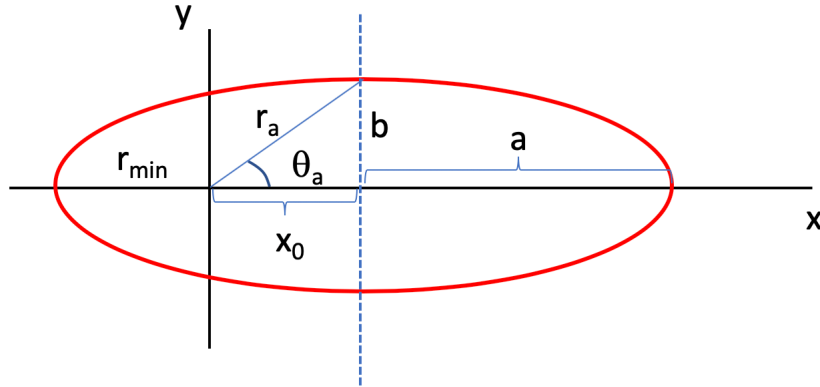
$$r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \epsilon}$$

אורך הציר הראשי הוא

$$A = r_{\max} + r_{\min} = r_0 \left( \frac{1}{1 - \epsilon} + \frac{1}{1 + \epsilon} \right) = \frac{2r_0}{1 - \epsilon^2} \quad (46)$$

לכן, אורך חצי הציר הראשי (semi major axis) הוא

$$a = \frac{A}{2} = \frac{r_0}{1 - \epsilon^2} \quad (47)$$



איור 8: הפרמטרים השונים המתארים אליפסה.

המרחק בין ראשית האליפסה וראשית הצירים הוא

$$x_0 = a - r_{\min} = r_0 \left( \frac{1}{1 - \epsilon^2} - \frac{1}{1 + \epsilon} \right) = \frac{r_0 \epsilon}{1 - \epsilon^2}. \quad (48)$$

מכאן נקבל מיד ש  $\epsilon = x_0/a$  (ראה איור 8).  
 אורך חצי הציר המשני (semi minor axis) הוא  $b = \sqrt{r_a^2 - x_0^2}$  כאשר  $\cos \theta_a = x_0/r_a$  ולכן

$$r_a = \frac{r_0}{1 - \epsilon \cos \theta_a} = \frac{r_0}{1 - \frac{\epsilon x_0}{r_a}}$$

או

$$r_a = r_0 + \epsilon x_0 = r_0 \left( 1 + \frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon^2} \right) = \frac{r_0}{1 - \epsilon^2}$$

ולכן

$$b = \sqrt{r_a^2 - x_0^2} = \left( \frac{r_0}{1 - \epsilon^2} \right) \sqrt{1 - \epsilon^2} = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \quad (49)$$

לבסוף, נוכיח שראשית האליפסה היא למעשה נקודת הפוקוס (המוקד) שלה - ראה איור 9. מהגדרת אליפסה, סכום המרחקים בין כל נקודה על האליפסה ושתי המוקדים שלה הוא זהה. אם נניח שאחד ממוקדי האליפסה היא בראשיתה, מטעמי סימטריה מיקום המוקד השני הוא ב-  $2x_0$ . נסמן את המרחקים בין נקודה כלשהיא על האליפסה ובין שני המוקדים ב-  $r, r'$  ממשפט הקוסינוסים נקבל

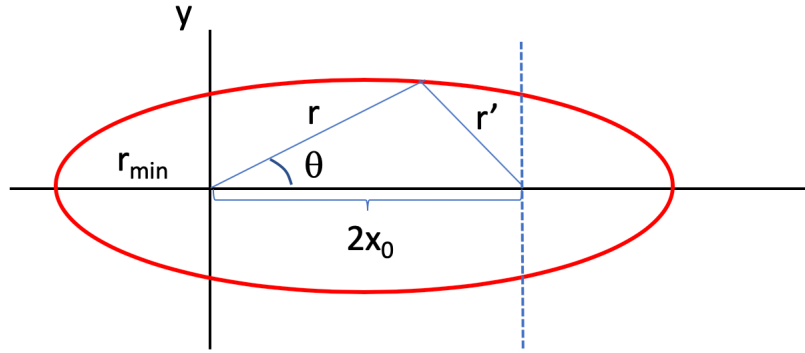
$$r'^2 = r^2 + 4x_0^2 - 4rx_0 \cos \theta \quad (50)$$

נשתמש ב-  $r \cos \theta = \frac{r-r_0}{\epsilon}$  (מתקבל מיד ממשוואת האליפסה בקואורדינטות קוטביות) ונקבל

$$r'^2 = r^2 + 4x_0^2 - \frac{4x_0 r}{\epsilon} + \frac{4x_0 r_0}{\epsilon}$$

נשתמש במשוואה 48 ונקבל

$$r'^2 = r^2 + \frac{4r_0^2 \epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)^2} - \frac{4r_0 r}{1 - \epsilon^2} + \frac{4r_0^2}{1 - \epsilon^2} = r^2 - \left( \frac{4r_0}{1 - \epsilon^2} \right) r + \frac{4r_0^2}{(1 - \epsilon^2)^2} \quad (51)$$



איור 9: הפרמטרים המשמשים בהוכחה שראשית האליפסה היא במוקד שלה.

או

$$r' = \pm \left( r - \frac{2r_0}{1 - \epsilon^2} \right) = \pm(r - A) \quad (52)$$

כיוון ש-  $r > A$  ו-  $r' > 0$  אנחנו בוחרים בסימן השלילי, ולכן

$$r' + r = A = Const$$

כלומר, הוכחנו שראשית האליפסה היא אכן בנקודה הפוקלית שלה. לסיכום, ניתן לרשום את פרמטרי האליפסה כפונקציה של המשתנים הפיסיקלים. הראינו ש-

$$r_0 = \frac{L^2}{\mu C}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu C^2}}$$

ומכאן:

$$a = \frac{r_0}{1 - \epsilon^2} = \frac{C}{-2E}$$

$$b = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} = \frac{L}{\sqrt{-2\mu E}}$$