מכניקה - הרצאה 2: קינמטיקה במספר מימדים

אסף פאר

22 באוקטובר 2018

הערה חשובה: סיכומי ההרצאות מבוססים על הרצאותיהם של **ד״ר יוסי בן ציון** כפי שהוקלדו על ידי **מיי מרקמן**, ושל **פרופסור דייוד קסלר** . כמו כן, ההרצאות מבוססות על מקורות [1] ו-[2]. כל האיורים מועתקים מסיכומיה של מיי מרקמן.

1 מבוא

עד עתה, למרות שהקפדנו לרשום את הווקטורים בצורה כללית, עסקנו בתנועה במימד אחד. משוואות התנועה שקיבלנו הן:

$$\vec{x} = \vec{x}(t) \tag{1}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} \equiv \dot{\vec{x}}} \tag{2}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}}} \tag{3}$$

או בסה״כ

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{x}} \equiv \frac{d^2x}{dt^2} \tag{4}$$

כעת, נרחיב את הדיון לתנועה בשני מימדים.

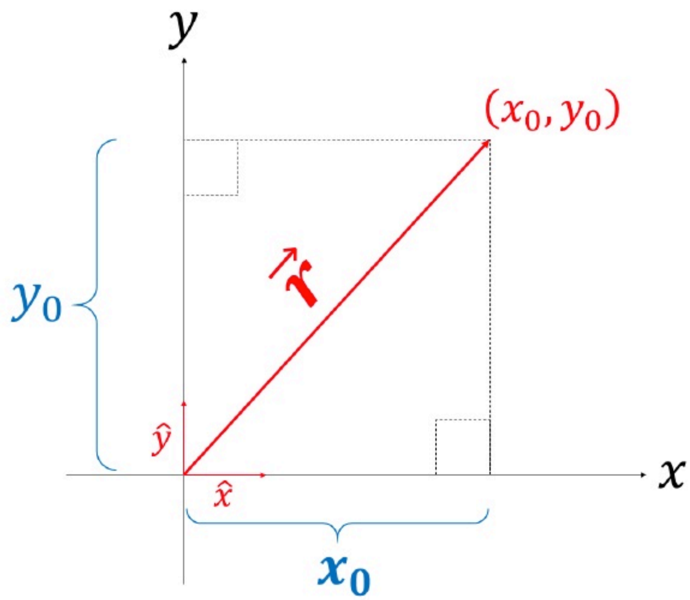
2 מערכת צירים קרטזית דו מימדית

נניח חלקיק שנע במישור הדו מימדי. לאחר הגדרת הצירים, נוכל להגדיר את ווקטור המיקום (הרגעי) של החלקיק כ-

$$\vec{r}(t) = x_0(t)\hat{x} + y_0(t)\hat{y} \tag{5}$$

(ראה איור 1). נשים לב שקואורדינטות מיקום החלקיק תלויות בזמן, ובהתאם ווקטור המיקום (במקרה הכללי) משתנה בזמן.

נסמן את מיקום החלקיק בזמן נתון כנקודה במישור (X-Y) . מאחר שהחלקיק משנה את מיקומו, בכל רגע נתון בזמן, נניח $a \le t \le b$ מיקום החלקיק מתואר על ידי עקומה רציפה בין $(x(t=a), y(t=a))$ ו- $(x(t=b), y(t=b))$, כמודגם באיור 2 למטה:



איור 1: ווקטור (במרחב אויקלידי דו מימדי)

כאשר ווקטור המיקום בזמן $t = a$ הוא

$$\vec{r}(a) = x(a)\hat{x} + y(a)\hat{y} \tag{6}$$

ובאופן דומה, ווקטור המיקום בזמן $t = b$:

$$\vec{r}(b) = x(b)\hat{x} + y(b)\hat{y} \tag{7}$$

ווקטור ההעתקה (הרגעי) הוא כמובן ההפרש בין ווקטור מיקום החלקיק בזמן $t + \Delta t$, $\vec{r}(t + \Delta t)$ ווקטור מיקומו בזמן t, $\vec{r}(t)$:

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \tag{8}$$

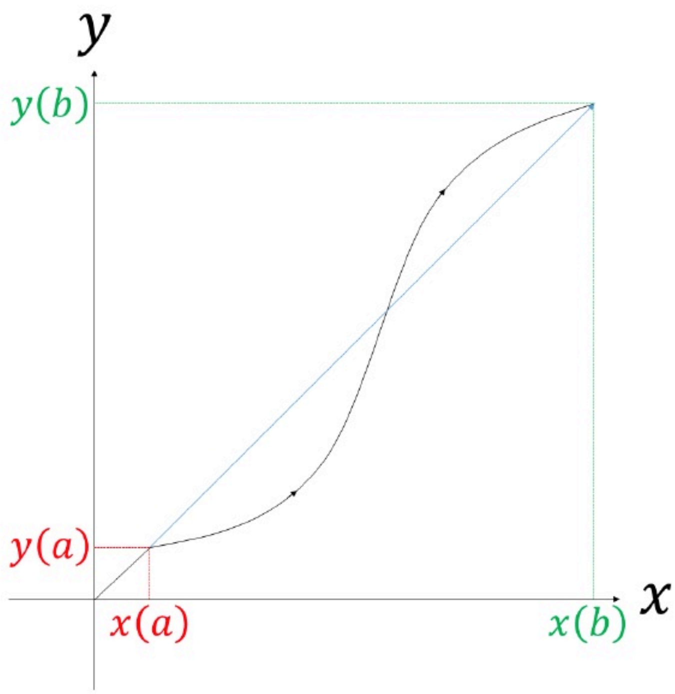
(ראה איור 3)
כאשר $\vec{\Delta r} \to 0$ נקבל שהווקטור $\vec{\Delta r}$ משיק לעקומה המתארת את מסלול החלקיק.
כמו כן, נגדיר את **המהירות** (הרגעית) של החלקיק כ-

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \tag{9}$$

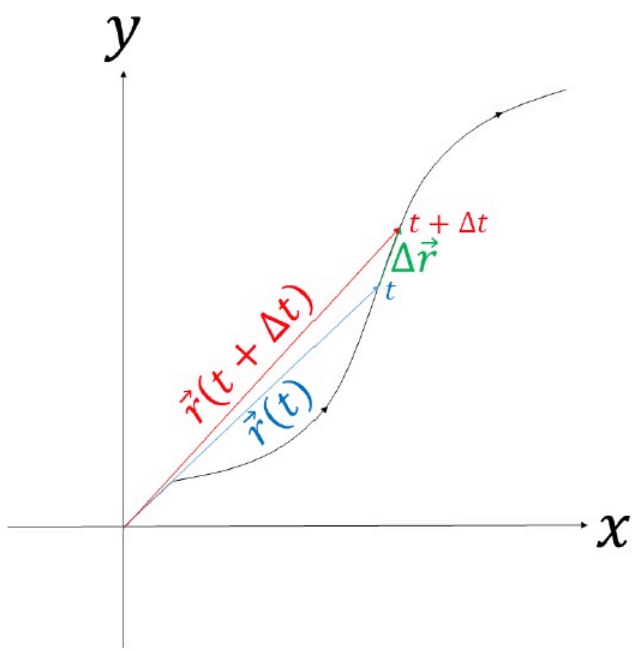
נשים לב, שגם ווקטור המהירות הוא משיק לעקומה המתארת את תנועת החלקיק בנקודה $(x(t), y(t))$.
נוכל כמובן לרשום את ווקטור ההעתקה באמצעות רכיביו השונים:

$$\begin{aligned} \vec{\Delta r} &= (x(t+\Delta t)\hat{x} + y(t+\Delta t)\hat{y}) - (x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}) \\ &= (x(t+\Delta t) - x(t))\,\hat{x} + (y(t+\Delta t) - y(t))\,\hat{y} \\ &\equiv \Delta x\hat{x} + \Delta y\hat{y} \end{aligned} \tag{10}$$

כלומר, ניתן לרשום את ווקטור ההעתקה כהעתקה של כל אחד מרכיבי הווקטור בנפרד.



איור 2: שינוי המיקום בזמן



איור 3: ווקטור המיקום הרגעי

לפיתוח זה יש חשיבות רבה כאשר נרצה לחשב את רכיבי ווקטור המהירות:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\hat{x} + \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\hat{y} \\ &= \left(\frac{dx}{dt}\right)\hat{x} + \left(\frac{dy}{dt}\right)\hat{y} \\ &= v_x\hat{x} + v_y\hat{y} \end{aligned} \tag{11}$$

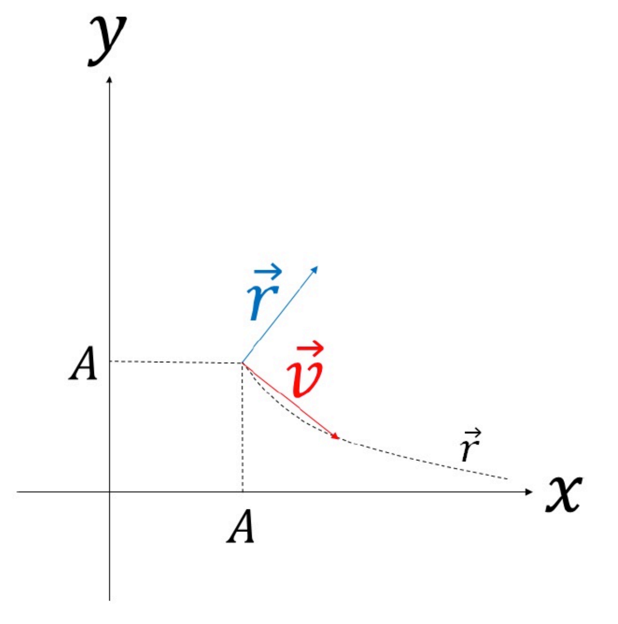
כאשר v_x ו- v_y הם רכיבי המהירות בצירי X ו-Y. כמובן שההרחבה למרחב התלת מימדי היא מיידית.
נגדיר את ווקטור **התאוצה** באופן זהה:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \left(\frac{dv_x}{dt}\right)\hat{x} + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)\hat{y} + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)\hat{z} \tag{12}$$

דוגמה: נניח שווקטור מיקומו של חלקיק נתון על ידי המשוואה:

$$\vec{r} = A\left(e^{\alpha t}\hat{x} + e^{-\alpha t}\hat{y}\right)$$

כש- A ו- α הם קבועים. מסלול החלקיק מתואר באיור 4:



איור 4: מסלול החלקיק בדוגמה

נחשב את ווקטור מהירות החלקיק:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \alpha A\left(e^{\alpha t}\hat{x} - e^{-\alpha t}\hat{y}\right). \tag{13}$$

כלומר,

$$v_x(t) = \alpha A e^{\alpha t}; \;\; v_y(t) = -\alpha A e^{-\alpha t}$$

בזמן $t = 0$ מתקיים:

$$\vec{r}(t=0) = A\left(\hat{x} + \hat{y}\right)$$
$$\vec{v}(t=0) = A\alpha(\hat{x} - \hat{y})$$

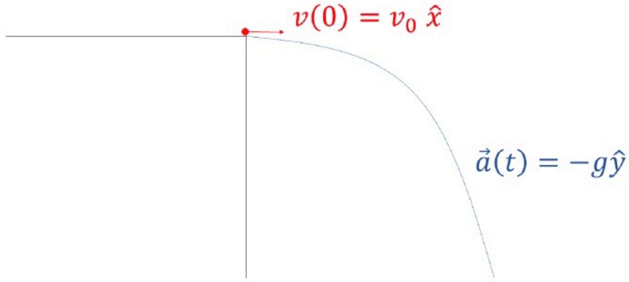
נשים לב, שמתקיים

$$\vec{r}(t=0)\cdot\vec{v}(t=0) = 0,$$

כלומר ווקטור המהירות (בזמן $t = 0$) מאונך לווקטור המיקום - כפי שניתן לראות באיור 4 .

דוגמה (2): זריקה אופקית

נניח עצם הנזרק אופקית במהירות התחלתית $\vec{v} = v_0\hat{x}$. על העצם פועל כוח הכובד, המתבטא בתאוצה $\vec{a}(t) = -g\hat{y}$ (ראה איור 5).



איור 5: זריקה אופקית.

נפתור את משוואות התנועה על מנת לקבל את מסלול הגוף. לשם כך, נרשום:

$$v_x = v_0(x) + \int a_x dt = v_0.$$

$$v_y = v_0(y) + \int a_y dt = 0 - \int g dt = -gt$$

ומכאן שווקטור המהירות הכללי הוא

$$\vec{v}(t) = v_0\hat{x} - gt\hat{y}.$$

כעת נחשב את מיקום הגוף בצירי x ו-y:

$$x = \int v_x dt = \int v_0 dt + v_0 t + x_0,$$

$$y = \int v_y dt = -\int g t dt = -\frac{gt^2}{2} + y_0$$

וניקח את נקודת ההתחלה כ- $(x_0, y_0) = (0, 0)$ (בלי הגבלת הכלליות).
נוכל לבטא את הזמן באמצעות המיקום בציר x, ולקבל

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2$$

כלומר, הגוף נע במסלול פרבולי.

2.1 תנועה מעגלית במהירות קבועה

תנועה מעגלית נפוצה מאוד בהרבה מערכות פיסיקליות. כאן, נתחיל את הדיון במקרה הפשוט ביותר - תנועה מעגלית במהירות קבועה. במקרה כזה, משוואות התנועה הן

$$\begin{aligned} x(t) &= r_0 \cos(\omega t); \\ y(t) &= r_0 \sin(\omega t), \end{aligned} \tag{14}$$

כש- r_0 (רדיוס הסיבוב) ו- ω (המהירות הזוויתית) הם קבועים.
לכן, ווקטור המיקום הוא

$$\vec{r}(t) = r_0 \cos(\omega t)\hat{x} + r_0 \sin(\omega t)\hat{y}. \tag{15}$$

נשים לב שגודל הווקטור הוא

$$|\vec{r}| = \sqrt{r_0^2 \cos^2(\omega t) + r_0^2 \sin^2(\omega t)} = r_0 \sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = r_0 \tag{16}$$

כלומר, רדיוס התנועה הוא קבוע - התנועה היא אכן מעגלית.

וקטור המהירות הוא

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -r_0 \omega \sin(\omega t)\hat{x} + r_0 \omega \cos(\omega t)\hat{y}. \tag{17}$$

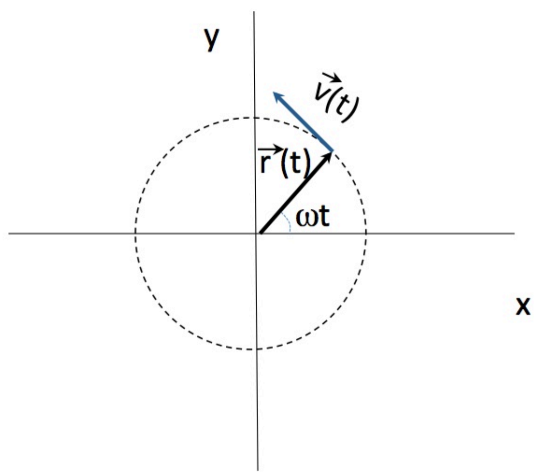
נשים לב לנקודה מעניינת: וקטור המהירות הוא אורתוגונלי (ניצב) לווקטור המיקום, שכן

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = r_0^2 \omega \left(-\sin(\omega t)\cos(\omega t) + \cos(\omega t)\sin(\omega t)\right) = 0 \tag{18}$$

כלומר,

$$\vec{v} \perp \vec{r}$$

במילים: ווקטור המהירות משיק למסלול התנועה - ראה איור למטה:



איור 6: תנועה מעגלית

באופן דומה, נחשב את ווקטור התאוצה:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = r_0 \omega^2 \left(-\cos(\omega t)\hat{x} - \sin(\omega t)\hat{y}\right) = -\omega^2 \vec{r} \tag{19}$$

כלומר, ווקטור התאוצה מכוון רדיאלית **פנימה**. התאוצה ידועה בשם **תאוצה צנטריפטלית.**

! **הערה:** ''אינטואיטיבית'', הכוח הצנטריפטלי (לא הגדרנו עדיין כוחות), הוא שמאפשר את התנועה המעגלית - בהעדר הכוח הזה, הגוף ימשיך לנוע בקו ישר. נדבר על כך בהמשך.

מקובל למדוד את המהירות הזוויתית, ω ביחידות של רדיאנים לשניה (rad/s) . בדיון הנוכחי, הנחנו שהיא קבועה. במקרה זה, הזווית (ברדיאנים) בין ווקטור המיקום וציר ה- X כתלות בזמן היא

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \;\; \leftrightarrow \;\; \theta = \omega t \tag{20}$$

(הנחנו, בלי הגבלת הכלליות, שהזווית ההתחלתית היא $\theta_0 = 0$). כלומר, המהירות הזוויתית מבטאת את שינוי הזווית בזמן, בדיוק כשם שהמהירות מבטאת את שינוי המיקום בזמן.

למהירות הזוויתית, ω, יש קשר פשוט עם התדירות, f. **התדירות** מוגדרת כמספר המעגלים השלמים אותם משלים הווקטור $\vec{r}$ ביחידת זמן. מכיוון שיש 2π רדיאנים במעגל, נקבל:

$$\omega = 2\pi f$$

המחזור , T של התנועה מוגדר כזמן הדרוש להשלמת סיבוב אחד. מכאן, שווקטור המיקום משלים סיבוב אחד בזמן T כך שמתקיים

$$\omega T = 2\pi$$

או

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \tag{21}$$

2.2 עוד על נגזרות וקטוריות והכללת פיתוח משוואות התנועה

ראינו, שעבור תנועה מעגלית במהירות קבועה, וקטור המהירות אנך לווקטור המיקום, וקטור התאוצה אנך לווקטור המהירות (ומקביל - עם סימן הפוך - לווקטור המיקום).

אכן, באופן כללי וקטור כלשהו משתנה בזמן: $\vec{A} = \vec{A}(t)$, ומכאן שנגזרת ווקטור תוגדר- באופן זהה לחלוטין להגדרת הנגזרות של ווקטורי המיקום והמהירות שהשתמשנו בהם עד עכשיו, כ-

$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t}} \tag{22}$$

הנקודה המהותית היא שהווקטור $\frac{d\vec{A}}{dt}$ הוא ווקטור בפני עצמו, שיכול להיות מכוון לכל כיוון, ללא תלות בכיוונו של הווקטור המקורי.

! נשים לב: ההבדל המרכזי בין חישובי נגזרות בווקטורים וחישובי נגזרות בסקלרים הוא שהיות שהנגזרת היא בעצמה ווקטור, יש לה הן גודל והן כיוון - בעוד שלנגזרת של סקלר יש גודל בלבד. ההבדל בא לידי ביטוי בדוגמת התנועה הסיבובית, שם כיוון ווקטור המהירות (נגזרת ווקטור המיקום) אנך לווקטור המיקום עצמו.

2.2.1 דיון כללי בווקטורים מסתובבים

אם ווקטור הנגזרת (בזמן) של $\vec{A}$, $d\vec{A}/dt$ תמיד אנכי ל- $\vec{A}$, אזי $\vec{A}$ חייב להסתובב. את זה ניתן לראות מאחר שגודלו של $\vec{A}$ נשאר קבוע, ולכן התלות בזמן מגיע כולה משינוי הכיוון.

לחלופין, אם גודלו של ווקטור $\vec{A}$ קבוע בזמן, אזי $d\vec{A}/dt$ אנכי ל- $\vec{A}$.

הוכחה: נרשום

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\cdot\vec{A}\right) = \frac{d}{dt}|\vec{A}|^2 = 0$$

שכן $|\vec{A}|$ קבוע.

מצד שני,

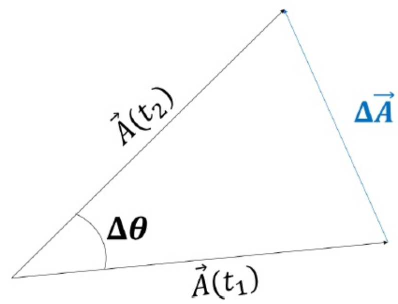
$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\cdot\vec{A}\right) = \vec{A}\cdot\dot{\vec{A}} + \dot{\vec{A}}\cdot\vec{A} = 2\vec{A}\cdot\dot{\vec{A}}$$

ולכן בהכרח

$$\vec{A}\cdot\dot{\vec{A}} = 0$$

נפתח כעת ביטוי חשוב לחישוב הנגזרת בזמן של ווקטור מסתובב. נניח ווקטור $\vec{A}$ שגודלו קבוע (אינו משתנה בזמן). השינוי ב- $\vec{A}$ בין הזמנים $t...t+\Delta t$ הוא

$$\Delta\vec{A} = \vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)$$



איור 7: שינוי ווקטור בעל גודל קבוע

נגדיר את הזווית $\Delta\theta$ כזווית בין $\vec{A}(t)$ ו- $\vec{A}(t+\Delta t)$ (ראה איור 7) .
באמצעות זווית זו, נחשב את גודל הווקטור $\Delta\vec{A}$:

$$|\Delta\vec{A}| = 2|\vec{A}|\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

תוך שימוש בגיאומטריה וחציית הזווית $\Delta\theta$ לשניים.
עבור זוויות קטנות (רלוונטי לזמנים קצרים) ידוע ש- $\Delta\theta \ll 1 \quad \to \sin(\Delta\theta/2) \approx \Delta\theta/2$ ולכן נקבל

$$|\Delta\vec{A}| \approx 2|\vec{A}|\frac{\Delta\theta}{2} = |\vec{A}|\Delta\theta$$

ולכן

$$\left|\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}\right| \approx |\vec{A}|\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

ובגבול $\Delta t \to 0$,

$$\left|\frac{d\vec{A}}{dt}\right| = |\vec{A}|\frac{d\theta}{dt}$$

הביטוי $d\theta/dt$ נקרא **המהירות הזוויתית** של הווקטור $\vec{A}$.
ספציפית אם הווקטור $\vec{A}$ הוא וקטור המיקום, $\vec{r}$ אזי

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = |\vec{r}|\frac{d\theta}{dt} = |\vec{r}|\frac{d}{dt}\omega t = |\vec{r}|\omega$$

כלומר, גודל וקטור המהירות הוא

$$|\vec{v}| = |\vec{r}|\omega$$

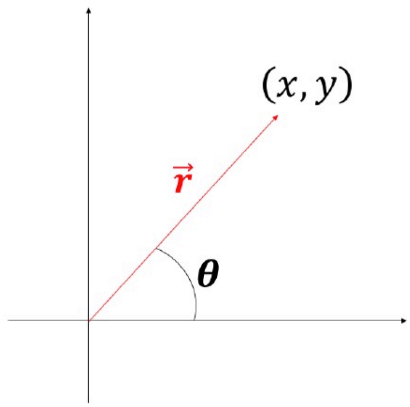
3 תיאור תנועה בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

כפי שציינו, תנועה סיבובית שכיחה מאוד בפיסיקה. בעוד שניתן להשתמש בקואורדינטות קרטזיות לשם תיאור התנועה, הטיפול הוא מגושם. שימוש בקואורדינטות קוטביות הופך את תיאור הבעיה לפשוט הרבה יותר.

3.1 הצגת הקואורדינטות

(נגביל את הדיון למישור הדו-מימדי).

במערכת קרטזית, מתארים מיקום של גוף במישור על ידי רכיבי ווקטור המיקום שלו בצירי (x, y). בקואורדינטות קוטביות, נשתמש בקואורדינטות (r, θ), כאשר
r הוא המרחק בין מיקומו של הגוף וראשית הצירים
θ היא הזווית בין ווקטור המיקום והכיוון החיובי של ציר x - ראה איור 8 :



איור 8: תיאור מיקום בקואורדינטות קוטביות, (r, θ)

! נשים לב, שכמו קואורדינטות קרטזיות, גם הקואורדינטות הקוטביות הן אורתוגונליות. לתכונה זו חשיבות רבה, שכן היא הופכת את ווקטורי הבסיס לבלתי-תלויים.

הקשר בין הקואורדינטות הקרטזיות לפולריות נתון ע"י

$$\boxed{\begin{aligned} x &= |\vec{r}|\cos\theta \\ y &= |\vec{r}|\sin\theta. \end{aligned}} \tag{23}$$

והקשר ההופכי:

$$\boxed{\begin{aligned} r = |\vec{r}| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}} \tag{24}$$

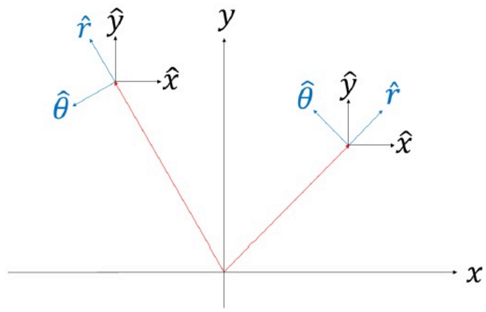
3.2 ווקטורי בסיס בקואורדינטות קוטביות

כפי שהיצגנו ווקטורי בסיס בקואורדינטות קרטזיות, נציג ווקטורי בסיס בקואורדינטות קוטביות. ווקטורי הבסיס יהיו אורתוגונליים, כלומר מאונכים זה לזה. נסמן את ווקטורי הבסיס ב- $\hat{r}$, $\hat{\theta}$. כיוון ווקטורי הבסיס- בכיוון הגדילה של r ו- θ.

ישנו הבדל מרכזי בין ווקטורי בסיס בקואורדינטות קוטביות וקרטזיות: הכיוון של ווקטורי הבסיס בקואורדינטות הקוטביות, $\hat{r}, \hat{\theta}$ הוא תלוי מיקום - ראה איור 9 :

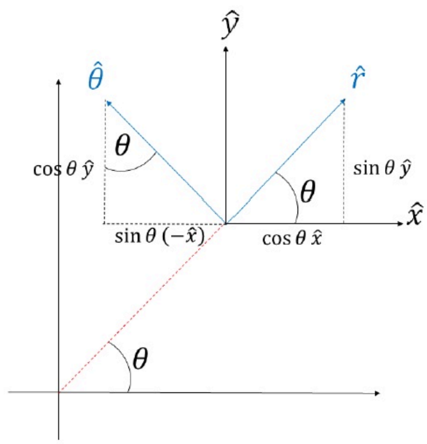
בגלל התלות במיקום, משוואות קינטיות עשויות להראות מורכבות יותר בקואורדינטות קוטביות מאשר בקרטזיות.

נשים לב, שכיוון ווקטורי הבסיס $\hat{r}, \hat{\theta}$ תלוי למעשה רק בקואורדינטה אחת - θ. מאיור 10, נקבל את הקשר בין ווקטורי הבסיס בקואורדינטות קוטביות ובקואורדינטות קרטזיות:



איור 9: כיווני ווקטורי בסיס בקואורדינטות קוטביות הם תלויי מיקום

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{r}(\theta) &= \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y} \\ \hat{\theta}(\theta) &= -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}. \end{aligned}} \tag{25}$$



איור 10: תיאור ווקטורי בסיס בקואורדינטות קוטביות באמצעות ווקטורי בסיס בקואורדינטות קרטזיות

מכאן ברור גם ש:

(1) : $|\hat{r}| = |\hat{\theta}| = 1$ (גודלם של ווקטורי הבסיס הוא 1).

(2) : $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0$ (הווקטורים אורתוגונלים).

ברור, שהווקטור אינו משתנה אם מתארים אותו בקואורדינטות קרטזיות או קוטביות. למשל, נרשום את ווקטור המיקום $\vec{r}$ בקואורדינטות קרטזיות:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$$

אותו הווקטור בקואורדינטות קוטביות:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

ואם נרשום ישירות:

$$x\hat{x} + y\hat{y} = r\cos\theta\hat{x} + r\sin\theta\hat{y} = r\hat{r}$$

כלומר, הראנו ששני הביטויים זהים.

3.3 מהירות בקואורדינטות קוטביות

על מנת לחשב את ווקטור המהירות, עלינו לעשות שימוש בכלל השרשרת.

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dr}{dt}\hat{r}(\theta)+r\frac{d\hat{r}(\theta)}{dt} \tag{26}$$

האיבר הראשון מוכר: זוהי המהירות בכיוון הרדיאלי. האיבר השני כולל גזירה בזמן של ווקטור בסיס.

על מנת לבצע את החישוב, נחזור למשוואה (25) ונשתמש בעובדה שווקטורי הבסיס הקרטזיים אינם משתנים. נרשום:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{r}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\cos\theta)\hat{x}+\frac{d}{dt}(\sin\theta)\hat{y}\\ &= -\sin\theta\dot{\theta}\hat{x}+\cos\theta\dot{\theta}\hat{y}\\ &= \dot{\theta}\hat{\theta}\end{aligned} \tag{27}$$

חישוב דומה ייתן

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt}=-\dot{\theta}\hat{r} \tag{28}$$

וסה"כ קיבלנו את הביטוי למהירות בקואורדינטות קוטביות:

$$\boxed{\vec{v}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}} \tag{29}$$

3.3.1 דוגמאות ספציפיות

(1) נניח מהירות רדיאלית: θ קבוע, $\dot{\theta}=0$. במקרה זה, $\vec{v}=\dot{r}\hat{r}$ - קיבלנו תנועה במימד אחד בכיוון הרדיאלי.
(2) תנועה משיקית, r קבוע: במקרה זה, $\vec{v}=r\dot{\theta}\hat{\theta}$. מאחר שהרדיוס r קבוע, התנועה היא בכיוון המשיק.
במקרה של תנועה במהירות זוויתית קבועה, $\theta=\omega t$, נקבל $\vec{v}=r\omega\hat{\theta}$
(3) תנועה משולבת במהירות קבועה (כדוגמת חרוז שמתקדם על חישוק מסתובב):
נניח שהממיקום בכיוון הרדיאלי נתון על ידי

$$r(t)=\alpha t$$

כאשר α חיובי וקבוע. כמו כן החישוק מסתובב במהירות זוויתית קבועה,

$$\theta(t)=\omega t$$

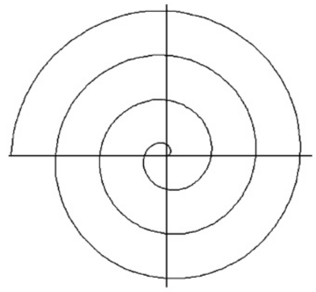
התנועה המתקבלת היא ספירלית (ראה איור 11) :
המהירות היא

$$\vec{v}=\alpha\hat{r}+\alpha\omega t\hat{\theta}$$

3.4 תאוצה בקואורדינטות קוטביות

נשתמש בנוסחה הרגילה,

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt}\\ &= \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}\right)\\ &= \ddot{r}\hat{r}+\dot{r}\frac{d}{dt}\hat{r}+\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}+r\ddot{\theta}\hat{\theta}+r\dot{\theta}\frac{d}{dt}\hat{\theta}\\ &= \ddot{r}\hat{r}+\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}+\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}+r\ddot{\theta}\hat{\theta}-r\dot{\theta}^2\hat{r}\\ &= \left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\hat{r}+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}\end{aligned} \tag{30}$$



איור 11: תנועה במהירות רדיאלית ומהירות זוויתית קבועות תייצר ספירלה במרחב.

כאשר השתמשנו במשוואות 27 ו- 28 לחישוב נגזרות $\hat{r}, \hat{\theta}$.

על מנת להבין את המשמעות הפיסיקלית / גיאומטרית של האיברים השונים המופיעים בנוסחה, נתבונן במקרי קצה:

(1): תאוצה רדיאלית.

האיבר הראשון, $\ddot{r}\hat{r}$ מבטא את התאוצה הנובעת משינוי המהירות הרדיאלית.

האיבר השני, $-r\dot{\theta}^2\hat{r}$ הוא התאוצה הצנטריפטלית (ראה משוואה 19) מקורו **בשינוי כיוון המהירות המשיקית**, $\Delta v_\theta \approx v_\theta \Delta\theta$, ובגבול $dv_\theta/dt = v_\theta\dot{\theta} = r\dot{\theta}^2$.

(2) תאוצה משיקית:

האיבר הראשון, $r\ddot{\theta}\hat{\theta}$ מבטא את התאוצה שנובעת משינוי המהירות המשיקית.

האיבר השני, $2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}$ נקרא **תאוצת קוריוליס.**

הערה. חלקכם בוודאי שמעו על כוח קוריוליס - זהו כוח מדומה, שנדמה כפועל על גוף בתנועה במערכת מסתובבת. תאוצת קוריוליס שאנו דנים בה כאן היא אמיתית (אינה מדומה), ונובעת משינוי של r ו-θ בזמן. כאשר גוף משנה את זוויתו, שינוי המהירות הרדיאלית הוא $\Delta v_r \approx v_r \Delta\theta$, ובגבול $dv_r/dt = v_r\dot{\theta}$; זה מסביר חצי מהתאוצה. את החצי השני נבין על ידי התבוננות במהירות המשיקית, $v_\theta = r\dot{\theta}$. כשהרדיוס משתנה, $\Delta v_\theta = \Delta r\dot{\theta}$, והתרומה לתאוצה היא לכן $\dot{r}\dot{\theta}$.

3.4.1 דוגמאות ספציפיות

נחזור אל הדוגמאות שדנו בהן קודם, ונחשב את התאוצה.

(1) תנועה רדיאלית במהירות קבועה - θ קבוע:

$$\vec{r}(t) = \alpha t\hat{r}$$

$$\vec{v}(t) = \alpha\hat{r} \qquad \vec{a}(t) = 0$$

(2) תנועה מעגלית במהירות זוויתית קבועה. הרדיוס קבוע, $\vec{r}(t) = r_0\hat{r}$

$$\theta(t) = \omega t$$

נקבל

$$\vec{v}(t) = r_0\omega\hat{\theta} \qquad \vec{a}(t) = 0\omega^2\hat{r}$$

(3) תנועת ספירלה - מהירות רדיאלית ומהירות זוויתית קבועות: $\theta(t) = \omega t$ $\quad \vec{r}(t) = \alpha t\hat{r},$

$$\vec{v}(t) = \alpha\hat{r} + \alpha t\omega\hat{\theta}$$

$$\vec{a}(t) = -\alpha t\omega^2\hat{r} + 2\alpha\omega\hat{\theta}$$

רשימת מקורות

[1] Kleppner, D. & Kolenkow, R., *”An Introduction to Mechanics”* (Cambridge), second edition.
[2] Kittel, C., *”Mechanics”* (Berkeley Physics Course Vol. 1, McGraw-Hill);

תרגום לעברית על ידי האוניברסיטה הפתוחה