מכניקה - הרצאה 3: חוקי ניוטון

אסף פאר

16 ביוני 2020

הערה חשובה: סיכומי ההרצאות מבוססים על הרצאותיהם של **ד״ר יוסי בן ציון** כפי שהוקלדו על ידי **מיי מרקמן**, ושל **פרופסור דייויד קסלר** . כמו כן, ההרצאות מבוססות על מקורות [1] ו-[2]. כל האיורים מועתקים מסיכומיה של מיי מרקמן.

1 מבוא

למרות שחוקי ניוטון מקובלים היום כבסיס לחוקי המכניקה, הם בשום אופן אינם ״מובנים מאליהם״. למעשה, לפני ניוטון היתה מקובלת ההשקפה של אריסטו, לפיה מצבו הטבעי של הגוף הוא מנוחה, ולכן גופים נעים (גם במהירות קבועה) רק אם פועל עליהם כוח. השקפה זו אינה נכונה, כמובן.

כיום ידועות לנו גם המגבלות של חוקי ניוטון - הם אינם תקפים בעולם האטומי (ואז יש להחליף את חוקי המכניקה הקלאסית בחוקי המכניקה הקוונטית), וגם לא במהירויות הקרובות למהירות האור, שאז יש להשתמש בחוקי תורת היחסות. עדיין, קל להראות (תלמדו בקורס הרלוונטי) שבגבולות הרלוונטיים - מהירויות קטנות ממהירות האור ואובייקטים הגדולים מגודל של אטומים, הן חוקי מכניקת הקוונטית והן חוקי היחסות מובילים לחוקי ניוטון בקרוב מעולה.

חוקי ניוטון מקובלים כ״לחם וחמאה״ של עולם הפיסיקה - שליטה בהם היא הכרחית להבנת העולם, ולהבנת תיאוריות מתקדמות יותר.

2 החוק הראשון של ניוטון ומערכות אינרציאליות

ראשית, נשים לב לנקודה מהותית. ניתן להגדיר תנועה, **רק כאשר היא נמדדת ביחס למערכת קואורדינטות מסויימת.** לכן, על מנת לתאר תנועה, הכרחי לבחור ראשית לכל מערכת קואורדינטות.

באופן ״אינטואיטיבי״, נגדיר מערכת אינרציאלית (=מערכת קואורדינטות אינרציאלית) כמערכת הנמצאת במנוחה. לחלופין, כמערכת הנעה במהירות קבועה. במערכת כזאת, נקבל שבהעדר כוחות, גוף נע ימשיך בתנועתו במהירות קבועה. נשים לב, שלא כל מערכות הקואורדינטות הן אינרציאליות: במערכת קואורדינטות מאיצה, למשל, מהירותו של הגוף תשתנה גם אם אף כוח לא פועל על הגוף.

לרוב, החוק הראשון של ניוטון מוגדר כ-

בהעדר כוחות חיצוניים, גוף אינו מאיץ - כלומר נע במהירות קבועה (או נמצא במנוחה אם התחיל ממנוחה) כל עוד נמדד במערכת אינרציאלית.

לחלופין, נוכל לרשום

$$\boxed{\sum \vec{F} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \vec{a} = 0} \tag{1}$$

למעשה, ההגדרה של מערכת אינרציאלית היא מערכת שבה, ורק בה, החוק הראשון של ניוטון כפי שנוסח למעלה תקף. כלומר,

מערכת צירים אינרציאלית היא מערכת שבה, בהעדר כוחות חיצוניים, גוף אינו מאיץ (נע במהירות קבועה או נמצא במנוחה אם התחיל ממנוחה).

לאחר שנקבל את ההגדרה הזאת, נוכל לרשום את החוק הראשון של ניוטון כ-

בכל מערכת פיסיקלית, תמיד ניתן להגדיר מערכת צירים אינרציאלית.

לכל צורך מעשי (בקורס הזה), נוכל להשתמש בהגדרה ראשונה. ואולם חשוב לשים לב להגדרה המדויקת.
נשים לב, שהחוק הראשון של ניוטון אינו אינטואיטיבי: בחיי היום יום, אובייקטים נעים נוטים להאט, ועלינו להפעיל כוח (למשל, ללחוץ על דוושת הגז במכונית) על מנת להשאיר אותם במהירות קבועה. זה כמובן תוצאה של החיכוך - בעולם ללא חיכוך (למשל בחלל) נצטרך להפעיל את אותו הכוח על מנת לעצור את הגוף כמו על מנת להאיצו.
! נשים לב: ישנן אין סוף מערכות אינרציאליות, הנבדלות זו מזו בכך שכל אחת מהן נעה במהירות קבועה ביחס לאחרות.

3 החוק השני של ניוטון

כאשר פועלים על גוף (בעל מסה קבועה) כוחות, הגוף מאיץ.

בהתאם לנוסחה:

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}} \qquad (2)$$

ישנם כמה נקודות מהותיות.
(1). מקור הכוח לא משנה - זה יכול להיות קפיץ, כוח חשמלי, וכו'.
(2). **המסה** היא תכונה פנימית של הגוף, ולמעשה מוגדרת על ידי החוק השני. כלומר המסה - ליתר דיוק **המסה האינרציאלית** מוגדרת כיחס בין שקול הכוחות הפועל על הגוף ותאוצתו.
ככל שהמסה גדולה יותר, כך, בהינתן כוח נתון, התאוצה של הגוף תהיה קטנה יותר, שכן $\vec{a} = \vec{F}/m$.
(3). יחידות
תאוצה היא שינוי המהירות בזמן, ובהתאם, במערכת SI $[a] = m/s^2$.
במערכת SI מסה נמדדת בק"ג, $[m] = kg$
בהתאם, כוח נמדד ביחידות ניוטון, $[F] = N = kg \cdot m/s^2$
(4). אם המסה של הגוף כן משתנה (למשל, רקטה אשר שורפת דלק), החוק השני של ניוטון הופך ל -

קצב שינוי התנע של גוף פרופורציונלי לשקול הכוחות הפועלים על הגוף

או בנוסחה

$$\boxed{\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})} \qquad (3)$$

כאשר התנע (הרגעי) מוגדר כמכפלת המסה במהירות,

$$\vec{p} \equiv m\vec{v}$$

! נשים לב: בכל הניסוחים של החוקים הראשון והשני של ניוטון, אנו מתחשבים **אך ורק** בכוחות הפועלים **על** הגוף, ולא בכוחות שהגוף עצמו מפעיל על סביבתו.
(5). נשים לב שהחוק השני תקף רק במערכות אינרציאליות. כמו כן, נשים לב (שוב) שישנן אין סוף מערכות

אינרציאליות : נניח שמצאנו מערכת אינרציאלית אחת. כל מערכת אינרציאלית אחרת נבדלת מהראשונה בכך שהיא נעה במהירות קבועה (בכיוון שרירותי כלשהו) ביחס אל המערכת הראשונה. מכאן, שתאוצת הגוף כפי שנמדדת על ידי צופה במערכת השניה, זהה לזו שנמדדת במערכת הראשונה, שכן

$$\vec{a}_2 = \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_1 + \vec{v}_{21}) = \frac{d\vec{v}_1}{dt} + 0 = \vec{a}_1$$

כאשר $\vec{v}_{21}$ היא מהירות מערכת (2) כפי שנמדדת במערכת (1), והיא (בהגדרה) קבועה.

4 החוק השלישי של ניוטון (חוק הפעולה והתגובה)

החוק מראה שכוחות תמיד באים בצמדים: אם גוף א׳ מפעיל כוח על גוף ב׳, אזי גוף ב׳ מפעיל כוח על גוף א׳, הזהה לכוח הראשון בגודלו, והפוך בכיוונו:

$$\boxed{\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}} \tag{4}$$

או בקיצור

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

כפי שנוכיח בהמשך, החוק השלישי מוביל לחוק שימור חשוב - חוק שימור התנע.

נשים לב, שהחוק השלישי חיוני על מנת שלחוק השני תהיה משמעות. ללא החוק השלישי, אין לנו דרך לדעת אם גוף מאיץ בגלל שפועל עליו כוח, או בגלל שאנחנו צופים בו במערכת צירים לא אינרציאלית.

5 כוחות אמיתיים וכוחות מדומים (fictitious forces)

ידועים לנו ארבעה כוחות בסיסיים בטבע:
(1) כוח הכבידה (גרוויטציה) - למרות שבחיי היום יום זהו הכוח שהכי ״מורגש״, בפועל הוא החלש מבין הכוחות.
(2) הכוח הגרעיני החלש - למרות שמו, הוא בכ-25 סדרי גודל חזק יותר מכוח הכבידה. הסיבה שאנחנו לא מרגישים אותו היא שהוא קצר טווח, ופועל על סקאלות של גרעין האטום. כוח זה הוא הגורם לתופעת הרדיואקטיביות (פירוק של נוקלאונים בגרעין האטום).
(3) הכוח האלקטרומגנטי - חזק בכ-36 סדרי גודל מכוח הכבידה, וכמו כוח הכבידה פועל למרחקים ארוכים - אך רק בין חלקיקים טעונים. כוח זה אחראי לקשרים הכימיים בין המולקולות השונות (ובעקיפין לכך שאנחנו לא ״נופלים דרך הרצפה״, או פשוט מתפרקים) . כמו כן הוא אחראי לרוב הכוחות הנראים בחיי היום יום - כוח החיכוך, כוח המשיכה בחבל, הכוח הנורמלי וכו׳ (מיד נגדיר).
(4) הכוח הגרעיני החזק - זהו הכוח החזק ביותר, כ-38 ס״ג חזק יותר מכוח הכבידה. בדומה לכוח הגרעיני החלש גם הוא קצר טווח, ופועל רק בתוך גרעין האטום. כוח זה אחראי לכך שגרעין האטום אינו מתפרק, למרות המטען החשמלי החיובי של הפרוטונים.

בקורס זה, ולמעשה לדעתי באף אחד מהקורסים לתואר ראשון, לא נדבר על הכוחות הגרעיניים החלש והחזק.

בנוסף, ישנם **כוחות מדומים** : הכוונה לכוחות אשר מקורם בכך שמערכת המדידה שלנו (המעבדה) היא לא מערכת אינרציאלית. דוגמה קלאסית היא כמובן כדור הארץ - למרות שבקרוב מצויין משטח כדור הארץ יכול להחשב כאינרציאלי, הוא לא, שכן כדור הארץ מסתובב. כך שמדידות במערכת כדור הארץ יגלו כוחות מדומים. לכוחות אלו השפעה על תהליכים שקורים בסקאלות גדולות מספיק, שבהן סיבוב כדור הארץ הוא משמעותי - כגון מערכות מזג אוויר גלובליות (ייתכן ששמעתם על כוח קוריוליס). נדון בכוחות אלה שמקורם, שוב, בתאוצת הצופה, בהמשך.

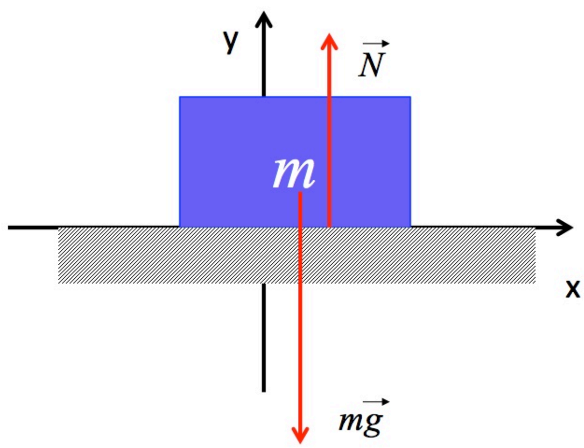
5.1 הכוח הנורמלי (כוחות מגע)

כוחות מגע נובעים, כשמם, ממגע בין גופים שונים: לדוגמה, אני דוחף בידי חפץ. כוחות אלה חשובים בדיון על מערכות מאקרוסקופיות. כאמור, כוח המגע הוא בבסיסו כוח חשמלי, ונובע מהקשרים בין המולקולות השונות.

רכיב כוח המגע הניצב (=נורמלי) למשטח המגע בין שני גופים נקרא **הכוח הנורמלי**. נשים לב, שלמילה "נורמלי" יש כאן משמעות גיאומטרית (=ניצב).

דוגמה. נתבונן בגוף הניצב על משטח אופקי, כדוגמת שולחן (ראה איור 1) . לגוף מסה m. על הגוף פועלים שני כוחות: הכוח הראשון הוא כוח הכובד, $m\vec{g}$ - זהו כוח המשיכה של כדור הארץ אשר כיוונו כלפי מטה $(-\hat{y})$.

הגוף עצמו מפעיל כוח על השולחן (כוח זה אינו פועל על הגוף, ולכן אינו מופיע באיור), ולפי החוק השלישי של ניוטון, השולחן מפעיל כוח נגדי על הגוף - זהו הכוח הנורמלי, המסומן $\vec{N}$ וכיוונו כלפי מעלה $(+\hat{y})$.



איור 1: הכוחות הפועלים על גוף הניצב על משטח אופקי

6 פתרון בעיות תוך שימוש בחוקי ניוטון.

חוקי ניוטון הם הבסיס לפתרון מגוון עצום של בעיות בפיסיקה. ואולם, כמו כל דבר בחיים, על מנת להשתמש בהם נכון, נדרש תרגול רב. נתחיל מפרוט אלגוריתם בסיסי לפתרון בעיות (פשוטות).

א. בודדי את הגופים זה מזה. יש צורך להתייחס לכל גוף בנפרד.

ב. בחרי מערכת צירים - והגדירי מהו כיוון חיובי.

ג. סמני את הכוחות הפועלים על כל גוף **בנפרד**. שלב זה עשוי להיות טריקי - יש לסמן רק את הכוחות הפועלים על הגוף, ולא את הכוחות שהגוף עצמו מפעיל. נוח לצייר כל כוח, שהוא וקטור, כחץ המראה את כיוונו במרחב. יש לסמן כל כוח באמצעות סימן שיבדיל אותו משאר הכוחות (לא באמצעות מספר).

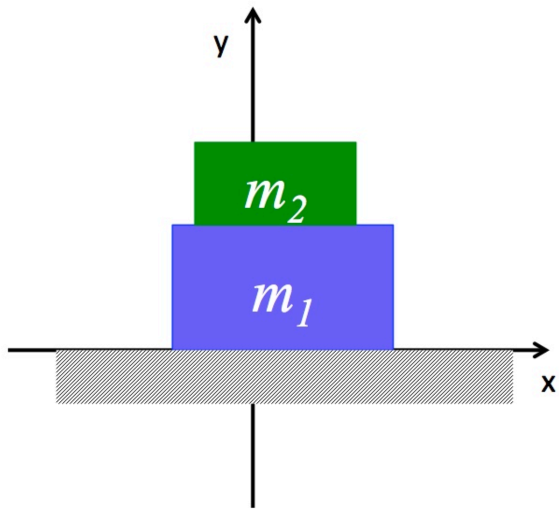
ד. רשמי את משוואות התנועה - משוואות החוק השני של ניוטון. על מנת להימנע מטעויות, לרוב עדיף לרשום את משוואות התנועה עבור כל ציר (קואורדינטה) בנפרד. כמובן, רושמים את משוואות התנועה עבור כל גוף בנפרד.

ה. במידה ויש אילוצים על תנועת הגוף (למשל: גוף מאולץ לנוע על משטח, וכו') יש לרשום את משוואות האילוצים.

ו. פתרי את משוואות התנועה בכפוף למשוואות האילוצים. לאחר מציאת הפיתרון- הפעילי את הדמיון: האם התשובה הגיונית? האם היא תואמת לאינטואיציה? אם לא, אז למה ?

6.1 דוגמה 1: שני גופים במנוחה

נתחיל בדוגמה הראשונה: שני גופים מונחים זה על גבי זה ועל משטח ישר, כפי שנראה באיור 2 . הגופים אינם בתנועה, כלומר המערכת היא **סטטית** (מערכת סטטית היא מערכת אשר בה שקול התאוצות הוא 0, בניגוד למערכת דינמית, אשר בה יש תאוצות שונות מ-0).

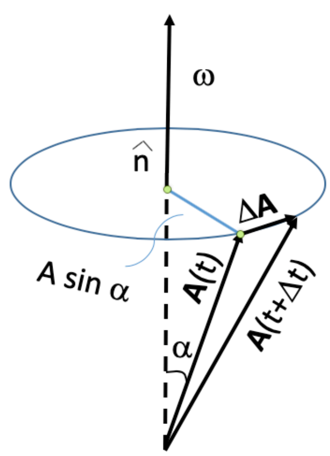


איור 2: שני גופים מונחים זה על גבי זה על משטח ישר

מטרתינו היא לחשב את כל הכוחות הפועלים במערכת. לשם כך, נסתכל על כל גוף בנפרד. על הגוף העליון (m_2) פועלים שני כוחות: כוח הכבידה $m_2\vec{g}$, והכוח שמפעיל עליו הגוף התחתון, המסומן $\vec{F}_{1\to2}$. נשים לב, ששני הכוחות פועלים בציר המאונך (ציר $\hat{y}$), כך שהבעיה היא במהותה חד-מימדית (ראה איור 3 משמאל).

נשים לב לנקודה נוספת: לפחות עד שלא ייאמר אחרת, אנחנו מתייחסים לכל גוף כאל "גוף נקודתי", כלומר לא מתייחסים לכוחות הפנימיים בתוך הגוף.

על הגוף התחתון (m_1) פועלים שלושה כוחות: כוח הכובד, $m_1\vec{g}$, הכוח שמפעיל עליו הגוף העליון, $\vec{F}_{2\to1}$, והכוח הנורמלי שמפעיל עליו השולחן, $\vec{N}$ - ראה איור 3 מימין.



איור 3: ימין: ווקטורי הכוחות הפועלים על m_1. שמאל: ווקטורי הכוחות הפועלים על m_2 .

כעת, נרשום את משוואות התנועה עבור כל אחד מהגופים בנפרד. לשם כך נגדיר תחילה את הכוח כחיובי אם הוא

בכיוון למעלה (גידול בציר y). מוסכמה זו, יחד עם העובדה שהבעיה היא חד-מימדית, מאפשרת לרשום משוואות עבור גודל הכוחות בלבד.

עבור הגוף התחתון, m_1, נקבל:

$$N - F_{2\to 1} - m_1 g = m_1 a = 0$$

שכן הגוף אינו מאיץ, ולכן $\vec{a} = 0$. כלומר,

$$N = F_{2\to 1} + m_1 g \tag{5}$$

ובאופן דומה עבור m_2:

$$F_{1\to 2} - m_2 g = m_2 a = 0 \quad \Rightarrow F_{1\to 2} = m_2 g$$

לבסוף, נשתמש בחוק השלישי של ניוטון בכדי לרשום

$$F_{1\to 2} = F_{2\to 1}$$

(נשים לב שבהגדרת הכוחות כבר דאגנו לכך שכיוונם יהיה הפוך). נציב במשוואה 5 ונקבל את הכוח הנורמלי,

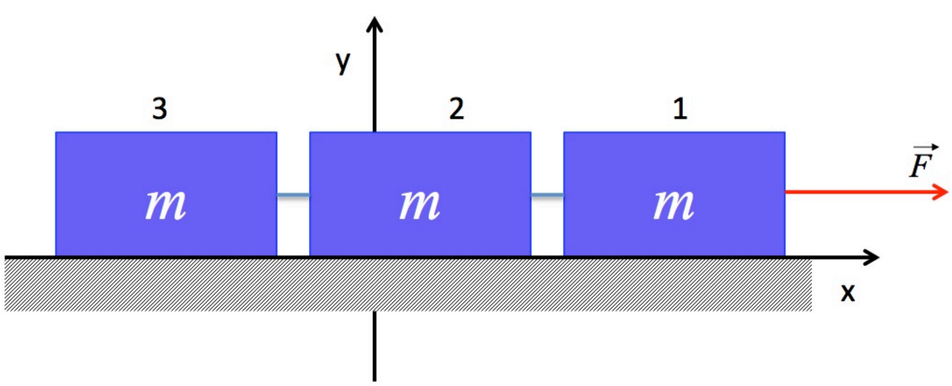
$$N = m_2 g + m_1 g = (m_1 + m_2) g$$

ובכך השלמנו את פתרון הבעיה.

השלב האחרון הוא כמובן לבדוק אם הפתרון סביר.

6.2 דוגמה 2: רכבת משא

נניח רכבת בעלת 3 קרונות, לכל אחד מסה m (שווה) נגררת על ידי קטר. הקטר מפעיל כוח $\vec{F}$ במישור האופקי (ציר x) - ראה איור 4 . נזניח את כוח החיכוך. מהו הכוח הפועל על כל קרון ?



איור 4: רכבת בעלת שלושה קרונות

לפני הפיתוח המלא, נתבונן במערכת. הקרונות מחוברים, ולכן לכולם אותה תאוצה, השווה ל- $\vec{a} = \vec{F}/3m$, שכן מסת הקרונות שווה.

באיור 5 (שמאל) מצויירת דיאגרמת הכוחות על הקרון השלישי. פועלים עליו שלושה כוחות: כוח הכובד, $m\vec{g}$, הכוח הנורמלי $\vec{N}$, והכוח שמפעיל עליו קרון 2, המסומן $\vec{F}_{2\to 3}$.

אין תאוצה בכיוון ציר y (אנכית) ומכאן ש- $N = mg$.

משוואת התנועה בציר x היא אם כך

$$F_{2\to3} = ma = m\left(\frac{F}{3m}\right) = \frac{F}{3} \tag{6}$$

כעת, נתבונן בקרון האמצעי. על קרון זה פועלים 4 כוחות: שניים בציר y - זהים לקרון (3), מאפסים זה את זה ולכן לא מצויירים, ושניים בציר x :

$$F_{1\to2} - F_{3\to2} = ma$$

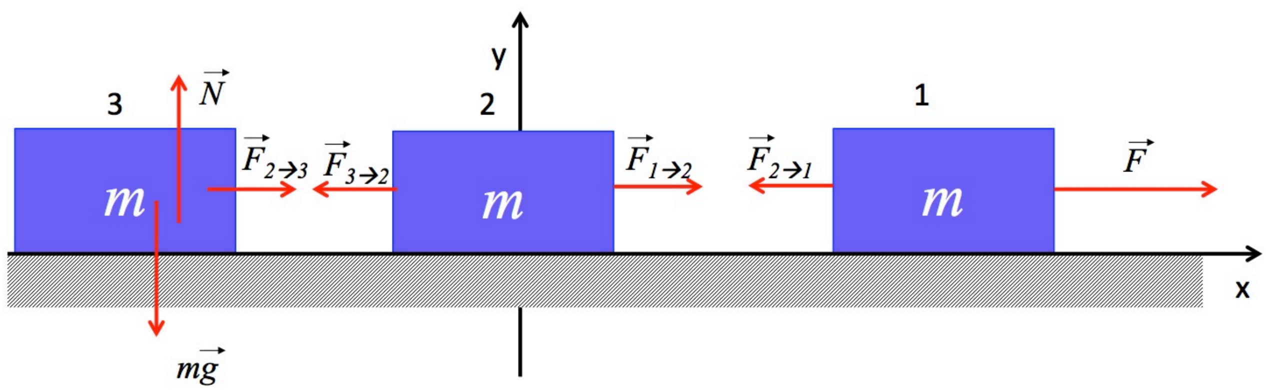
ומהחוק השלישי של ניוטון ידוע ש- $F_{3\to2} = F_{2\to3} = \frac{F}{3}$ ולכן סה"כ

$$F_{1\to2} = ma + \frac{F}{3} = m\left(\frac{F}{3m}\right) + \frac{F}{3} = \frac{2F}{3} \tag{7}$$

לבסוף, הכוחות האופקיים הפועלים על הקרונית הראשונה הם F מצד אחד, ו-

$$F_{2\to1} = F_{1\to2} = \frac{2F}{3}.$$

סה"כ נקבל שעל כל קרון פועל כוח (נטו) השקול ל- $F/3$ וכיוונו ימינה.



איור 5: הכוחות הפועלים על כל קרון - מחושבים בנפרד

הערה: אם הקרונות מוחזקים על ידי חבל, מקובל לסמן את הכוחות בחבל באות T - לסימון המילה האנגלית Tension (מתח).

6.2.1 שני קרונות בעלי מסות שונות

נחזור על הדוגמה עם שני קרונות בעלי מסות שונות - m ו-M המוחזקים על ידי חבל (ראה איור 6).
משוואת התנועה של הגוף הראשון (m) היא

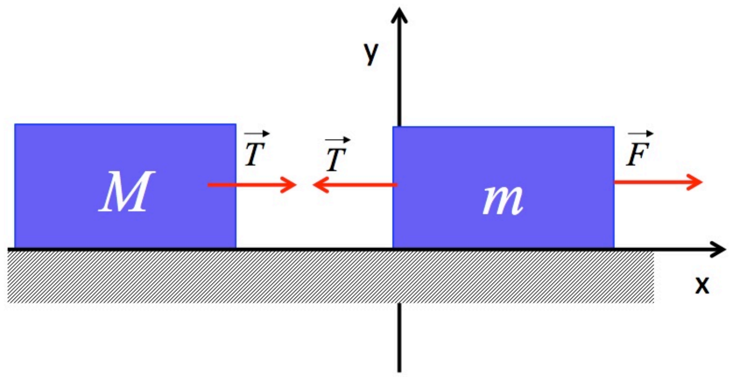
$$F - T = ma$$

והשני

$$T = Ma$$

נציב ונקבל

$$F = (M+m)a,$$
$$T = \frac{M}{M+m}F$$



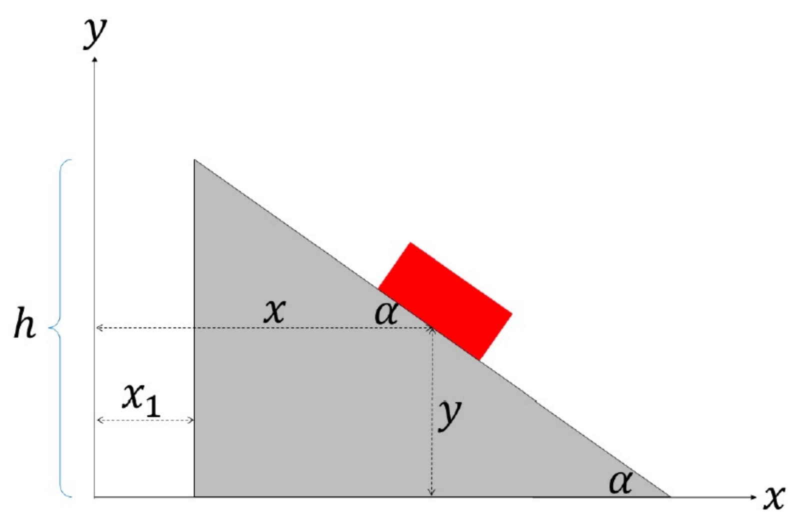
איור 6: הכוחות הפועלים על כל קרון - (בעלי מסות שונות)

6.3 דוגמה 3: תנועה עם אילוצים

נדגים כעת כיצד לכתוב משואת אילוץ, ולהשתמש בה בפתרון משוואת התנועה.

נניח גוף שנע (ללא חיכוך) במורד מישור משופע. המישור עצמו מחליק (גם כן ללא חיכוך) על שולחן ישר. זווית המישור היא α וגובהו - h (ראה איור 7). התאוצות של הגוף ושל המישור קשורות זו בזו על ידי אילוצים. נחשב תחילה את משואות האילוצים.

מכיוון שהמישור המשופע במגע עם השולחן, האילוץ (הטריוויאלי) הראשון הוא שהוא מאיץ רק בציר x.



איור 7: מישור משופע בתנועה עם גוף עליו

על מנת למצוא את האילוץ השני, נסמן את מיקומו של הגוף ב- x, y, ואת מיקומו של קצה המישור המשופע ב- x_1. מגיאומטריה (המשולש העליון) נקבל:

$$\frac{h-y}{x-x_1} = \tan\alpha$$

או

$$h - y = (x - x_1)\tan\alpha$$

נגזור פעמיים לפי הזמן, ונקבל

$$-\ddot{y} = (\ddot{x} - \ddot{x}_1)\tan\alpha \tag{8}$$

זוהי משוואת האילוצים על תאוצות הגופים השונים.
נשים לב, שמשוואת האילוצים אינה תלויה בכוחות הפועלים על המערכת.

6.3.1 פתרון מלא של משוואות התנועה - מישור במנוחה.

נניח כעת שהמישור המשופע מקובע, ואינו יכול לנוע. במקרה זה, $\ddot{x}_1 = 0$, ומשוואת האילוצים נרשמת כ-

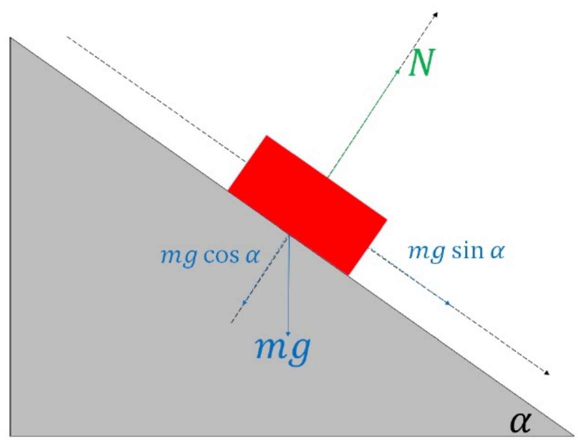
$$-\ddot{y} = \ddot{x}\tan\alpha$$

נעזוב כעת את משוואת האילוצים, ונרשום את משוואת הכוחות. על הגוף פועלים שני כוחות: כוח הכובד והכוח הנורמלי. ראשית, נשים לב (שוב, מגיאומטריה, ראה איור 8) שהכוח הנורמלי הוא $N = mg\cos\alpha$
נרשום את משוואת הכוחות בציר x (ראה איור 9):

$$\sum F_x = N\sin\alpha = m\ddot{x}$$

$$mg\cos\alpha\sin\alpha = m\ddot{x}$$

$$\rightarrow\ \ \ddot{x} = g\cos\alpha\sin\alpha$$



איור 8: הכוחות הפועלים על גוף הנע על מישור משופע

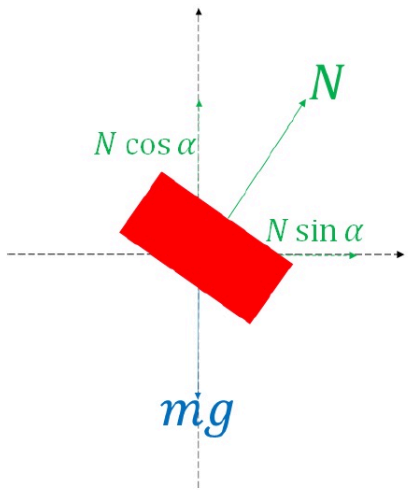
ומשוואת הכוחות בציר y:

$$\sum F_y = N\cos\alpha - mg = m\ddot{y}$$

$$mg\cos^2\alpha - mg = m\ddot{y}$$

$$\rightarrow\ \ \ddot{y} = g\left(\cos^2\alpha - 1\right) = -g\sin^2\alpha$$

ונשים לב, שמשוואת האילוץ מתקבלת מחיבור של שתי משוואות התנועה.

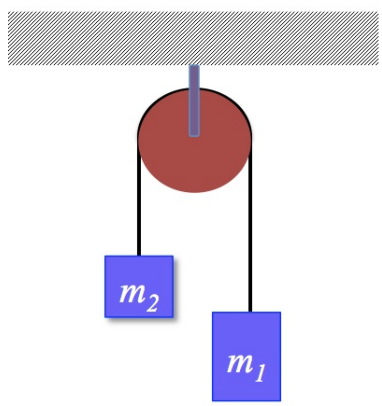


איור 9: הכוחות הפועלים על הגוף הנמצא על מישור משופע, בצירי x,y

6.4 דוגמה 4: מכונת אטווד

מכונת אטווד (הומצאה ע״י ג׳ורג׳ אטווד ב-1784) מורכבת מגלגלת חסרת חיכוך התלוייה מהתקרה. על הגלגלת, שתי משקולות (שונות). בבעיה מניחים שהחבל והגלגלת בעלות מאסות זניחות וכן חסרי חיכוך (ראה איור 10).

נניח ש- $m_1 > m_2$. במקרה זה, המסה m_1 תאיץ כלפי מטה, ואילו m_2 כלפי מעלה.



איור 10: מכונת אטווד

נחשב את גודל התאוצה. על כל מסה פועלים שני כוחות (ראה איור 11): כוח הכבידה והמתיחות בחבל. לפי החוק השלישי של ניוטון למתיחות בחבל יש אותו ערך בשני קצותיו. מהחוק השני של ניוטון נרשום את משוואות התנועה לכל גוף:

$$(m_1): \quad m_1 g - T = m_1 a$$
$$(m_2): \quad T - m_2 g = m_2 a$$

נחבר את המשוואות, ונקבל:

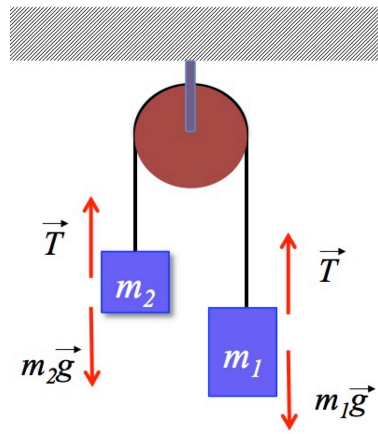
$$(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a$$

או

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

נציב, ונקבל את המתיחות בחבל:

$$T=\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g$$



איור 11: הכוחות הפועלים על כל אחד מהגופים במכונת אטווד

6.5 דוגמה 5: מערכת גלגילות

מערכת גלגילות מהווה דוגמה מצויינת למערכת עם אילוצים. הגלגלת נחשבת כאחת משש המכונות הבסיסיות, והיא מאפשרת - בשימוש נכון - את הפחתת הכוח הנדרש לשם הרמת משא.

נתבונן בדוגמת הגלגלות באיור 12 למטה. גלגיליה 1 מחוברת לתקרה בחבל באורך h והגלגיליה השניה חופשית לנוע, ונמצאת במרחק y_2 מהתקרה. המשקולת הראשונה נמצאת במרחק y_1 מהתקרה. רדיוס כל גלגיליה הוא r.

ראשית, נרשום את משוואת האילוצים. האילוץ כאן הוא על אורך החבל:

$$l=y_2+\pi r+(y_2-h)+\pi r+(y_1-h)=2y_2+y_1+2\pi r-2h$$

נגזור פעמיים את המשוואה, ונקבל את משוואת האילוצים

$$0=2\ddot{y}_2+\ddot{y}_1$$

כלומר

$$\ddot{y}_2=-\frac{1}{2}\ddot{y}_1$$

כלומר, תאוצת המשקולת (2) היא מחצית מתאוצת המשקולת (1), ובכיוון ההפוך.

כעת נפתור את חוקי התנועה ונחשב את התאוצה. לשם כך, נשרטט את הכוחות הפועלים על כל גוף בנפרד (ראה איור 13). נסמן את המתח בחבל המרכזי ב- T, ובחבל שמחזיק את המשקולת (2) ב- T_1.

חוק התנועה (החוק השני של ניוטון) למשקולת (1):

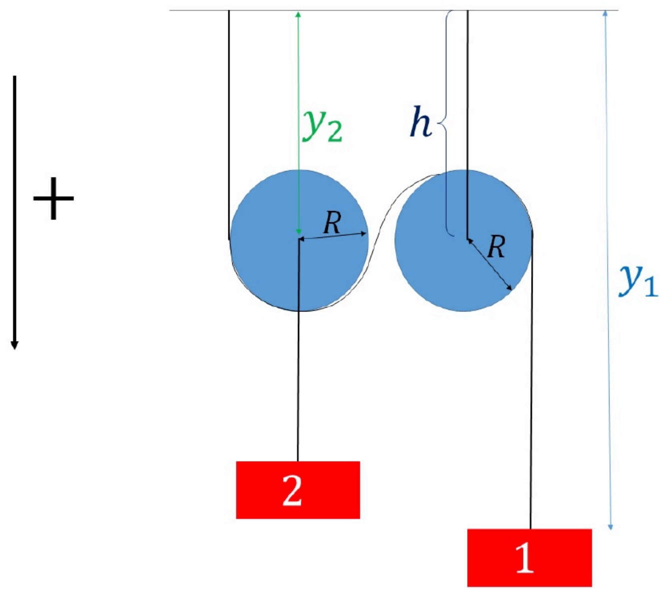
$$m_1g-T=m_1\ddot{y}_1$$

ולמשקולת (2):

$$m_2g-2T=m_2\ddot{y}_2=-\frac{m_2}{2}\ddot{y}_1$$

נכפיל את המשוואה הראשונה ב-2 ונחסיר את השניה:

$$2m_1g-m_2g=2m_1\ddot{y}_1+\frac{m_2}{2}\ddot{y}_1$$



איור 12: מערכת שתי משקולות על גלגילות.

או

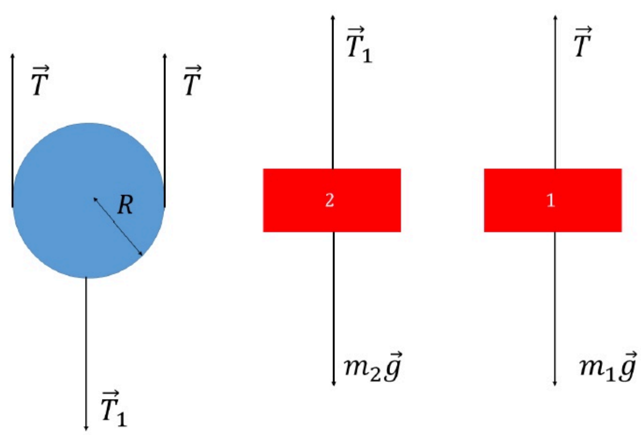
$$\ddot{y}_1 = \frac{4m_1 - 2m_2}{4m_1 + m_2} g$$

כמו כן, על ידי הצבה נקבל

$$T = m_1(g - \ddot{y}_1) = \frac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g$$

$$T_1 = 2T.$$

הערה: אם ננסה להרים את המשקולת (2) על ידי הפעלת כוח, הרי שהכוח שווה ל- T - כלומר מחצית מהכוח שהיה עלינו להפעיל ללא מתקן הגלגיליות (T_1).



איור 13: הכוחות הפועלים במערכת שתי משקולות על גלגילות.

רשימת מקורות

[1] Kleppner, D. & Kolenkow, R., *"An Introduction to Mechanics"* (Cambridge), second edition.
[2] Kittel, C., *"Mechanics"* (Berkeley Physics Course Vol. 1, McGraw-Hill);

תרגום לעברית על ידי האוניברסיטה הפתוחה