מכניקה - הרצאה 4: כוחות ומשוואת התנועה

אסף פאר

16 ביוני 2020

הערה חשובה: סיכומי ההרצאות מבוססים על הרצאותיהם של **ד״ר יוסי בן ציון** כפי שהוקלדו על ידי **מיי מרקמן**, ושל **פרופסור דייויד קסלר** . כמו כן, ההרצאות מבוססות על מקורות [1] ו-[2]. כל האיורים מועתקים מסיכומיה של מיי מרקמן.

1 מבוא

כפי שהסברתי בשיעור הקודם, ידועים לנו 4 כוחות בסיסיים בטבע:
(1) כוח הכבידה (גרוויטציה)
(2) הכוח האלקטרומגנטי (חשמלי)
(3) הכוח הגרעיני החלש - הגורם לתופעת הרדיואקטיביות
(4) הכוח הגרעיני החזק.
כאמור, בקורס זה לא נדון בכוחות הגרעיניים, אלא נתמקד בכוח הכבידה ובכוח החשמלי.
מחיי היום יום, מוכרים לנו כוחות נוספים: דיברנו , למשל על הכוח הנורמלי. כוחות נוספים הם כוח החיכוך, או הכוח שמפעיל קפיץ. כאמור, בחינה מדוקדקת מראה שמקורם של הכוחות הללו הוא בעצם הכוח החשמלי הפועל בין המולקולות השונות. ואולם, נוח לנו להתייחס אל כל כוח כזה בנפרד- מטעמי נוחות, שכן בחישוב פעולה של קפיץ, למשל, אין שום סיבה להיכנס לתיאור הקשרים בין האטומים והמולקולות, על מנת לתאר את פעולתו של הקפיץ.

בשיעור זה, נרחיב על פעולת הכוחות השונים - הבסיסיים (כבידה וחשמלי) והנגזרים מהם.
ואולם, תחילה נמשיך את הדיון בשימוש באילוצים כדרך לפתרון בעיות.

2 על שימוש נכון באילוצים בפתרון בעיות מכניות.

בשיעור הקודם, קבענו שעל מנת לפתור בעיות מכניות, יש לרשום את חוק התנועה **לכל גוף בנפרד**, ואז לרשום את משוואת האילוצים, ולהשתמש בה לפתרון משוואות התנועה.

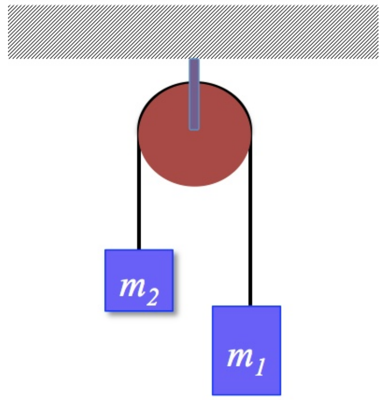
הנקודה המרכזית היא שבמערכת בה ישנם מספר גופים, בדרך כלל רישום של משוואות התנועה אינו מספיק, שכן יהיו יותר נעלמים ממשוואות.

2.1 דוגמה: מכונת אטווד (שוב)

נחזור לדוגמת מכונת אטווד מהשיעור הקודם (ראה איור 1):

רשמנו את משוואות התנועה עבור כל אחת משתי המסות. מאחר שהתנועה היא בכיוון y בלבד, יש משוואה אחת לכל מסה, ובסה״כ שתי משוואות:

$$\begin{aligned} m_1g - T &= m_1\ddot{y}_1 \\ m_2g - T &= m_2\ddot{y}_2 \end{aligned} \tag{1}$$



איור 1: מכונת אטווד

כאשר $\ddot{y}_1$ היא תאוצת הגוף הראשון (נלקחת כאן כלפי מטה), $\ddot{y}_2$ היא תאוצת הגוף השני (מניחים, שוב כלפי מטה), ו-T היא המתיחות בחוט.

כלומר, סה"כ ישנן 2 משוואות ב-3 נעלמים - לא מספיק על מנת לפתור את הבעיה. כאן אנחנו עושים שימוש במשוואת האילוץ. האילוץ בבעיה זו הוא שאורכו של החבל קבוע,

$$l = (y_p - y_1) + \pi r_0 + (y_p - y_2) = const$$

כאשר r_0 הוא רדיוס הגלגלת, y_1, y_2, ו- y_p הם גובהי המגופים והגלגלת (pooley) מעל הרצפה. מאחר שמשוואות התנועה כוללות תאוצה, נוח לגזור את משוואת האילוץ פעמיים, בכדי לקבל אילוץ על התאוצות,

$$\ddot{l} = -\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2$$

כאשר הנחנו שגובה הגלגלת מעל הרצפה הוא קבוע, $y_p = const$.

רק לאחר הצבת משוואת האילוץ במשוואות התנועה נוכל לפתור אותן. נשים לב שבשיעור שעבר דילגנו על שלב הצבת האילוץ, ואולם במערכות מורכבות יותר דילוג כזה עלול להתגלות כהרה אסון.

לאחר הצבת האילוץ, נקבל את התוצאה אותה פיתחנו בהרצאה הקודמת,

$$a_1 = \ddot{y}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \tag{2}$$

2.2 גלגלת מאיצה

כדוגמה נוספת, נפתור בעיה דומה לבעיית אטווד, אלה שכעת נניח שהגלגלת אינה קבועה לתקרה, אלה מאיצה כלפי מעלה (למשל, הגלגלת נמצאת בתוך מעלית). נסמן את גובה הגלגלת עצמה מהקרקע ב- y_p. (pulley).

משוואות התנועה על כל גוף לא השתנו מהדוגמה הקודמת:

$$\begin{aligned} m_1 g - T &= m_1 \ddot{y}_1 \\ m_2 g - T &= m_2 \ddot{y}_2 \end{aligned} \tag{3}$$

ומשוואת האילוץ על אורך החבל גם היא זהה:

$$l = (y_p - y_1) + \pi r_0 + (y_p - y_2) = const$$

ואולם במקרה זה, y_p משתנה, ולכן גזירה פעמיים תיתן

$$0 = 2\ddot{y}_p - \ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 \quad \rightarrow \ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 2\ddot{y}_p \tag{4}$$

נציב במשוואת התנועה השניה, ונקבל

$$\begin{aligned} m_1 g - T &= m_1 \ddot{y}_1 \\ m_2 g - T &= m_2(2\ddot{y}_p - \ddot{y}_1) \end{aligned} \tag{5}$$

אשר פתרונן

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= \tfrac{(m_1-m_2)g+2m_2\ddot{y}_p}{m_1+m_2}; \\ \ddot{y}_2 &= 2\ddot{y}_p - \ddot{y}_1 = \tfrac{(m_2-m_1)g+2m_1\ddot{y}_p}{m_1+m_2}. \end{aligned} \tag{6}$$

3 דינמיקה בקואורדינטות קוטביות

באופן זהה לרישום משוואות התנועה בקואורדינטות קרטזיות, ניתן לרשום את משוואת התנועה בקואורדינטות קוטביות. נזכיר שפיתחנו את משוואות המיקום, המהירות והתאוצה בקואורדינטות אלה:

$$\begin{aligned} &\vec{r} = r\hat{r}; \\ &\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \equiv v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}; \\ &\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta} \equiv a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}. \end{aligned} \tag{7}$$

משוואות התנועה כמובן אינן משתנות:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{8}$$

אלא שכאן כמובן נוח לעבוד בצירי r, θ,

$$\begin{aligned} &\sum F_r = ma_r; \\ &\sum F_\theta = ma_\theta. \end{aligned} \tag{9}$$

נתבונן, לדוגמה, במקרה של תנועה מעגלית ברדיוס קבוע, $r = r_0$ ובמהירות זוויתית משתנה, $\omega = \omega(t)$. הזווית היא כמובן

$$\theta(t) = \int \omega(t)dt + \theta_0$$

ווקטור המהירות הוא

$$\vec{v}(t) = r_0\omega(t)\hat{\theta}$$

כלומר, בכיוון המשיקי בלבד. ווקטור התאוצה הוא

$$\vec{a} = -r_0\omega^2(t)\hat{r} + r\dot{\omega}(t)\hat{\theta}$$

כלומר, לווקטור רכיב תאוצה רדיאלית השווה ל- $a_r = -r_0\omega^2(t)$, וכן רכיב משיקי, $a_\theta = r_0\dot{\omega}(t)$.

דוגמה זו מראה כי תמיד קיים רכיב תאוצה רדיאלי בתנועה מעגלית, שכן חייב להיות כוח רדיאלי הגורם לתנועה להיות מעגלית. לפי חוק התנועה נחשב את הכוח הרדיאלי,

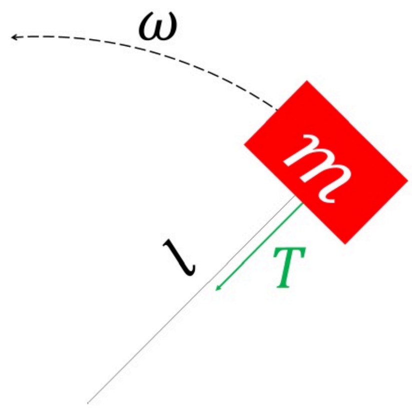
$$\sum F_r = ma_r = -mr_0\omega^2\hat{r} = -\frac{mv^2}{r_0}\hat{r}. \tag{10}$$

3.1 דוגמה - גוף קשור בחוט

נניח גוף הקשור בחוט שאורכו l, ומאולץ לנוע בתנועה מעגלית. הגוף נע במהירות זוויתית קבועה, $\omega(t) = \omega$ (ראה איור 2). נחשב את המתיחות בחוט.

מחוק התנועה (בכיוון הרדיאלי), נקבל

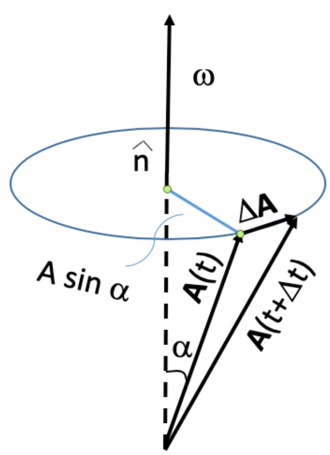
$$\begin{aligned} &\sum F_r = ma_r \\ &\rightarrow \quad -T = -\omega^2 lm \\ &T = ml\omega^2 \end{aligned} \tag{11}$$



איור 2: תנועה מעגלית

3.2 דוגמה - גוף קשור בחוט בשדה כבידה

נניח שהסיבוב המדובר של הגוף הוא אנכי, וכן שעל הגוף פועל כוח הכובד. במצב זה, על הגוף פועלים שני כוחות: כוח הכובד - mg בכיוון האנכי, והמתיחות בחוט T בכיוון מרכז הסיבוב (ראה איור 3):



איור 3: תנועה מעגלית אנכית בשדה כבידה

נחשב את המתיחות בחוט. לשם כך, נרשום את משוואת התנועה בכיוון הרדיאלי:

$$\begin{aligned}&\sum F_r = ma_r\\&-T - mg\sin\theta = m(\ddot{l} - l\dot{\theta}^2) = -ml\omega^2\\&\rightarrow\ T = ml\omega^2 - mg\sin\theta\end{aligned} \tag{12}$$

מאחר שחוט יכול למשוך אך לא לדחוף, קיים אילוץ - $T \geq 0$, כלומר

$$l\omega^2 \geq g\sin\theta \tag{13}$$

ולכן המהירות הזוויתית המינימלית הנדרשת לקיום תנועה מעגלית מתקבלת על ידי הצבת $\theta = 90°$,

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{l}}$$

3.3 דוגמה - מטוטלת קונית

נניח גוף בעל מסה m הקשור בקצהו של מוט (חסר משקל) בעל אורך l התלוי מהתקרה ומסתובב במהירות זוויתית ω. עקב הסיבוב, המסה נמצאת בזווית α עם הניצב (ראה איור 4). השאלה: מהי הזווית α ?

פתרון: על הגוף פועלים בדיוק 2 כוחות: כוח הכובד (הפועל כלפי מטה) והמתיחות במוט, הפועל בכיוון ציר הסיבוב.
בבעיה זו, נוח להשתמש בצירים y ו- r (הנמצא במישור המאוזן - ראה איור).
שקול הכוחות בכיוון $\hat{y}$ מתאפס,

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad T\cos\alpha = mg.$$

שקול הכוחות בכיוון הרדיאלי שווה לתאוצה הרדיאלית:

$$\sum F_r = -m\omega^2 r \quad \rightarrow \quad -T\sin\alpha = -m\omega^2 r = -m\omega^2 l\sin\alpha$$

כלומר,

$$T = m\omega^2 l$$

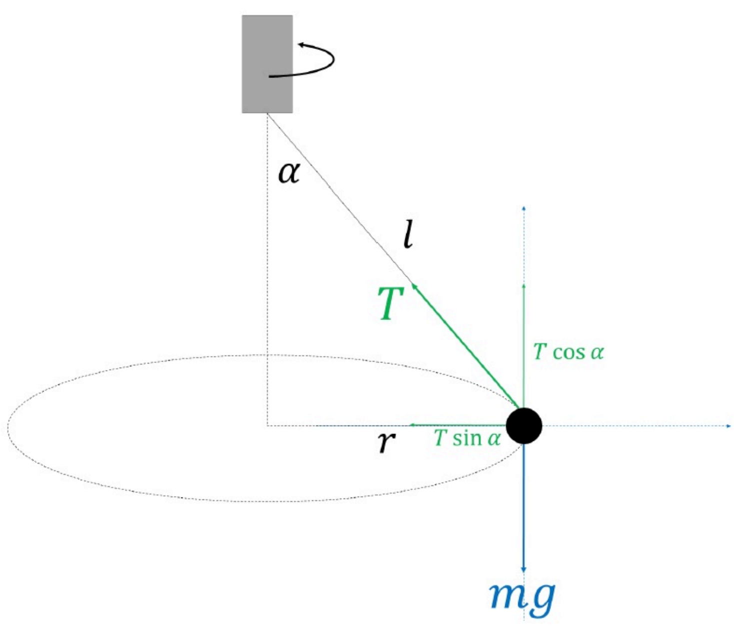
נציב במשוואה הראשונה, ונקבל

$$\omega^2 = \frac{g}{l\cos\alpha} \quad \leftrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{g}{l\omega^2}$$

כעת, נתבונן בפתרון. עבור $\omega \to \infty$, $\cos\alpha \to 0, \quad \alpha \to 90°$. התוצאה הגיונית - הגוף "עף החוצה".
ואולם עבור ω קטן, נקבל $\cos\alpha \to \infty$ מה שכמובן אינו אפשרי מתימטית.
הפתרון שלנו מראה שעבור

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

מתקיים $\cos\alpha = 1, \quad \sin\alpha = 0$.
הבעיה היתה כמובן בדרך - חילקנו ב- $\sin\alpha$ תוך הזנחת האפשרות ש- $\sin\alpha = 0$.



איור 4: מטוטלת קונית

הנקודה היא, שתמיד קיים גם פתרון שני: $\sin\alpha = 0$, כלומר המטוטלת פשוט תלויה מהתקרה במאונך. מעשית, עבור $\omega < \sqrt{\frac{g}{l}}$ זהו אכן הפתרון. עבור $\omega > \sqrt{\frac{g}{l}}$, ישנם שני פתרונות - $\cos\alpha = \frac{g}{l\omega^2}, \quad \cos\alpha = 1$. אלא שרק הפתרון השני הוא יציב - כלומר, הפרעה קטנה תגרום למטוטלת "לקפוץ החוצה".

4 כוח הכבידה

נעבור כעת לדיון מעמיק קצת יותר בכוח הכבידה. כידוע, כוח הכבידה מילא תפקיד מרכזי בפיתוח המכניקה. ניוטון כתב את משוואת כוח הכבידה ב-1666 - אותה שנה שבה הוא פרסם את חוקי התנועה, בגיל 26 .

לפי חוק הכבידה של ניוטון, כל שני גופים מאסיביים (בעלי מסות) מושכים האחד את השני בכוח הפרופורציונלי למכפלת המסות שלהם, והפוך לריבוע המרחק ביניהם. כמו כן, כוח הכבידה הוא תמיד **מושך**.

מתימטית, נרשום:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}} \tag{14}$$

(ראה איור 5).

איור 5: כוח הכבידה בין שני גופים.

הקבוע G נקרא **קבוע הכבידה**. ניתן למדוד אותו על ידי מדידת הכוח הפועל בין שתי מסות ידועות, שמרחקן ידוע. המדידה הראשונה (האמינה) שלו בוצעה על ידי Henry Cavendish ב-1771.

ערכו הנמדד של קבוע הכבידה (או קבוע הגרוויטציה) הוא

$$\boxed{G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \ \mathrm{m}^3\ \mathrm{Kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}} \tag{15}$$

קבוע הכבידה נחשב לאחד מהקבועים הבסיסיים בטבע (יחד עם קבוע פלנק ומהירות האור). למעשה, בגלל חולשת כוח הכובד, הקבוע נמדד בדיוק נמוך יחסית לקבועים האחרים, של כ- 10^{-4}.

כוח הכובד הוא **כוח מרכזי**. כיוונו בכיוון הקו המחבר בין מרכזי המסות של שני הגופים. סימן ה- (-) משמעותו כי הכוח מושך: בהסכמה, כיוון הווקטור $\hat{r}_{12}$ הוא מהגוף המושך (1) אל הגוף הנמשך (2). הכוח $\vec{F}_{12}$ הוא הכוח שמרגיש הגוף הנמשך (2). הסימן השלילי משמעותו שהכוח הוא בכיוון הקטנת המרחק $|r_{12}|$ בין הגוף הנמשך למושך.

כמובן, לפי החוק השלישי של ניוטון, גוף (2) מושך את גוף (1) בכוח שגודלו זהה וכיוונו הפוך,

$$\vec{F}_{21} = -\frac{Gm_2m_1}{r_{12}^2}\hat{r}_{21} = \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} = -\vec{F}_{12} \tag{16}$$

4.1 כוח הכבידה של כדור

כוח הכבידה כפי שנוסח על ידי ניוטון מתאר משיכה בין שני גופים נקודתיים. בטבע, לרוב מופיעים גופים לא נקודתיים - כדוגמת כדור הארץ. ניתן לחשב את כוח המשיכה של גוף לא נקודתי בקלות (יחסית), על ידי שימוש בעובדה שכוח הוא ווקטור, וניתן לחבר ווקטורים. כוח המשיכה של כל גוף הוא הסכום הווקטורי של כוחות המשיכה של החלקיקים השונים המרכיבים את הגוף.

לשם החישוב, יש צורך לחלק את הגוף לאוסף של חלקיקים, לחשב את כוח המשיכה מכל חלקיק, ולחבר (חיבור ווקטורי). לשם כך יש, בעיקרון, להשתמש בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.

לא אביא כרגע את החישוב המלא, שכן הוא דורש אינטגרל תלת מימדי, אלא רק את התוצאה הסופית. כוח הכובד שמפעילה קליפה דקה שמסתה M (מפוזרת בצפיפות אחידה על פני הקליפה) ודריוסה R על חלקיק במסה m ובמרחק r ממרכז הקליפה הוא

$$\begin{array}{ll} \vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} & r > R, \\ \vec{F} = 0 & r < R. \end{array} \tag{17}$$

כלומר, חישוב מלא מראה שאם החלקיק נמצא מחוץ לקליפה, כוח הכובד שפועל עליו זהה לכוח הכובד שמפעיל עליו חלקיק נקודתי בעל אותה מסה כמו הקליפה כולה, שממוקם במרכזה.

לעומת זאת, אם החלקיק ממוקם בתוך הקליפה, כוח הכובד הפועל עליו מתאפס. ניתן להבין תוצאה זו באופן אינטואיטיבי מטעמי סימטריה: אם נצייר שני קונוסים בין מיקום החלקיק לקליפה, נקבל שמסת הקליפה בכל קונוס פרופורציונלית לשטח הקליפה, כלומר למרחק ב-^{2}. לעומת זאת, גודל הכוח פרופורציונלי הפוך לריבוע המרחק, ומכאן שהכוחות שמפעילים שני אלמנטי המסה מבטלים אחד את השני.

כוח הכובד המופעל על ידי כדור מלא אחיד (קרוב טוב לכדור הארץ, למשל), מחושב על ידי אינטגרציה של כוח הכובד מקליפות קונצנטריות ברדיוסים משתנים. התוצאה הסופית היא שכוח הכובד מחוץ לכדור מתנהג כאילו כל מסת הכדור מרוכזת במרכזו. תוצאה זו נכונה גם אם הצפיפות משתנה כפונקציה של הרדיוס (אבל לא כפונקציה של הזווית).

לכן, קרוב טוב לכוח הכבידה שמפעיל כדוה"א על גוף במסה m במרחק r ממרכז כדוה"א הוא

$$\vec{F} = -G\frac{M_E m}{r^2}\hat{r}, \quad r > R_E \tag{18}$$

כש- M_E ו- R_E הם מסת ורדיוס כדוה"א, בהתאמה.

4.2 תאוצת הכבידה בכדור הארץ

כאמור, על פני כדור הארץ, כוח הכבידה הפועל על גוף בעל מסה m הוא

$$\vec{F} = -G\frac{M_E m}{R_E^2}\hat{r}, \tag{19}$$

ולכן תאוצת הכבידה היא

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\frac{M_E}{R_E^2}\hat{r}. \tag{20}$$

תאוצה זו, כצפוי, בלתי תלויה במסת הגוף, m. מקובל לסמן את התאוצה הזאת בווקטור $\vec{g}$, המכוון "למטה" - כלומר, בכיוון מרכז כדוה"א.

$$\vec{g} \equiv -G\frac{M_E}{R_E^2}\hat{r}, \quad g \simeq 9.80\ \mathrm{m/s^2} \tag{21}$$

נשים לב שהערך המדוייק של תאוצת הכבידה על פני כדוה"א, המסומן גם כן כ- g משתנה במקצת ממקום למקום, בעיקר עקב סיבוב כדוה"א, וכן עקב העובדה שכדוה"א אינו לחלוטין כדורי, אלה פחוס במקצת באיזור הקטבים.

כמובן, שתאוצת הכבידה משתנה עם הגובה, h. עבור גובה $h << R_E$, נוכל להשתמש בפיתוח טיילור בכדי לרשום

$$\Delta g = g(R_E + h) - g(R_E) = \Delta r \left(\frac{\Delta g}{\Delta r}\right) \approx h\left.\frac{dg}{dr}\right|_{R_E}$$

כלומר

$$\Delta g \approx 2G\frac{M_E}{R_E^3}h = -2g\frac{h}{R_E}$$

לחלופין,

$$\frac{\Delta g}{g} = -\frac{2h}{R_E}$$

4.2.1 משקל

משקל של גוף מוגדר ככוח הכבידה המופעל עליו על ידי כדוה"א. על שפת כדוה"א משקלו של גוף בעל מסה m הוא

$$\vec{W} = -G\frac{M_E m}{R_E^2}\hat{r} = m\vec{g} \tag{22}$$

יחידות המשקל (במערכת SI) הן כמובן ניוטון [N] .

נשים לב: בחיי היום היום, לעיתים קרובות מוחלפים "משקל" ומסה". ואולם ההגדרה שלנו היא חד משמעית: לדוגמה, בחלל, המסה של אסטרונאוט זהה למסתו על פני כדור הארץ (או בכל מקום אחר), ואולם משקלו שונה (ושווה ל-0).

4.2.2 עקרון השקילות

אני אזכיר כאן נקודה מעניינת, ועמוקה מאוד. למעשה, עשינו שימוש כפול בהגדרת המונח "מסה". בחוק הכבידה של ניוטון (משוואה 1) המסה - או ליתר דיוק **המסה הגרוויטציונית** מודדת את כוח הכבידה הפועל על הגוף (לחלופין, זהו קבוע הצימוד בין שני גופים המפעילים אחד על שני כוח כבידה). באופן עקרוני, זהו גודל שונה מאשר המסה המופיעה בחוק התנועה (החוק השני של ניוטון) - המסה האינרציאלית. באופן נסיוני, ידוע ששתי המסות שוות:

$$m_I = m_G \tag{23}$$

ולכן ההתיחסות שלנו היא כ"מסה". השוויון הזה נקרא "עקרון השקילות" (בין מסה אינרציאלית וגרוויטציונית). עד היום לא ידוע למה שתי המסות שקולות - זו נקודה שעומדת בבסיסה של תורת היחסות הכללית.

4.3 הכוח האלקטרוסטטי

על מנת להסביר טוב יותר את העובדה שהמסה האינרציאלית לא "חייבת" להיות זהה למסת הכבידה, - שהיא קבוע הצימוד של גוף עם כוח הכבידה - נתבונן בכוח אחר, הכוח האלקטרוסטטי.

הדיון כאן יהיה קצר, שכן אלקטרוסטטיקה תידון באריכות בקורס אחר (חשמל ומגנטיות). המטרה כאן היא לשים לב לקווי הדמיון בין כוח הכבידה והכוח החשמלי.

באופן זהה לכוח הכבידה, גם הכוח האלקטרוסטטי הוא כוח מרכזי, אשר גודלו הפוך לריבוע המרחק בין שני הגופים. לכל גוף אלמנטרי יש תכונה הנקראת **מטען חשמלי** ומסומנת באות q.

נסיונית ידוע לנו שהמטען החשמלי של חלקיקים יכול להיות רק $q = -1, 0, 1$. כמו כן, ידוע לנו (שוב, נסיונית) שגופים עם מטען חשמלי זהה (חיובי או שלילי) דוחים אחד את השני, ואילו גופים בעלי מטען חשמלי הופכי מושכים אחד את השני.

הכוח האלקטרוסטטי בין שני מטענים נתון ע"י:

$$\vec{F}_{ab} = k\frac{q_a q_b}{r^2}\hat{r} \tag{24}$$

כאשר k הוא קבוע, וערכו (ביחידות)SI הוא

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2 \tag{25}$$

כש - C היא יחידת מטען, אשר ביחידות SI נקראת Coulumb . נשים לב, שהמטען החשמלי, q הוא "קבוע הצימוד" הקובע עד כמה ירגיש גוף את הכוח החשמלי. הוא משחק תפקיד זהה לזה של המסה בכוח הכובד.

5 כוחות פנומנולוגים

המונח "פנומנולוגי" בפיסיקה מתאר תופעות נצפות, שהן לאו-דווקא בסיסיות. לעיתים קרובות, תיאוריות מתפתחות בשלבים. כך שלמרות - כפי שאמרנו, שמקור הכוחות שנדון בהם הוא למעשה חשמלי, באופן מעשי נוח לדון בכוחות הללו באופן עמצאי.

5.1 כוחות מגע

אלה כוחות המועברים באמצעות מגע (קצר טווח) בין גופים שונים. בין הכוחות האלה נמנים: הכוח הנורמלי, N וכח המתיחות בחבל, T.

כאשר גוף במגע עם משטח, ניתן להפריד את הכוח שהמשטח מפעיל על הגוף לשני רכיבים. הרכיב הניצב נקרא הכוח הנורמלי (בו נתקלנו כבר). הרכיב המשיקי נקרא חיכוך.

5.2 חיכוך

כוח החיכוך הוא כוח המופעל על ידי המשטח עליו נע הגוף, **ומתנגד לתנועה.** כוח החיכוך מושפע מסוג המשטחים (ברמה המולקולרית - הקשרים בין המולקולות) וממידת הלחץ של הגוף על המשטח (לחץ = כוח ליחידת שטח).

באופן אמפירי (=נסיוני) נמצא שכוח החיכוך פרופורציונלי לכוח הנורמלי:

$$|f| = |\vec{F}_{friction}| = \mu|N| \tag{26}$$

כאשר N הוא הכוח הנורמלי, f הוא כוח החיכוך, ו-μ הוא גודל חסר יחידות הנקרא **מקדם החיכוך**.

כמו כן, נמצא, שוב באופן נסיוני, כי כוח החיכוך קטן כאשר הגוף מתחיל לנוע. לכן מבדילים בין ''חיכוך סטטי'' - שהוא כוח החיכוך הפועל על גוף במנוחה, ו''חיכוך דינמי'', הפועל על גוף בתנועה. מקדם החיכוך הסטטי גדול יותר ממקדם החיכוך הדינמי. מקדמי החיכוך תלויים במשטחים השונים המתחככים ביניהם. ערכים אופיניים למקדם החיכוך הסטטי בין משטחים שונים הם 1 - 0.1 , אם כי ישנם חריגות מכלל אצבע זה - לדוגמה, מקדם החיכוך של משטח קרח שמחליק על משטח קרח אחר הוא כ- 0.05 .

כוח החיכוך הסטטי הוא הכוח שמונע מגוף לנוע. כאשר הגוף נמצא במנוחה, מתקיים כי כוח החיכוך הפועל על הגוף חייב להיות קטן מערכו המקסימלי האפשרי, כלומר

$$0 \leq f \leq \mu_s N \tag{27}$$

כאשר סימנו את מקדם החיכוך הסטטי ב- μ_s.

לעומת זאת, כאשר הגוף נמצא בתנועה, כוח החיכוך הפועל עליו הוא **כוח החיכוך הקינטי**, השווה ל-

$$f = \mu_k N \tag{28}$$

כאשר כיוונו של כוח זה הוא תמיד הפוך לכיוון התנועה. כמו כן, סימנו את מקדם החיכוך הקינטי ב- μ_k, ומתקיים תמיד

$$\mu_k \leq \mu_s$$

דוגמה. נפתור שוב את בעיית הגוף (בעל מסה m) המחליק על מישור משופע בזווית α. הפעם, יש חיכוך בין הגוף והמישור (שאינו בתנועה). השאלה היא מהי הזווית המינימלית α שמעליה הגוף יחליק?

ראשית, נשים לב כי בהעדר חיכוך, הגוף יחליק. מכאן, שכוח החיכוך פועל במעלה המשטח (ראה איור 6).

אם נגדיר את ציר ה- X בכיוון המישור המשופע, נרשום את משוואת התנועה לאורך ציר זה:

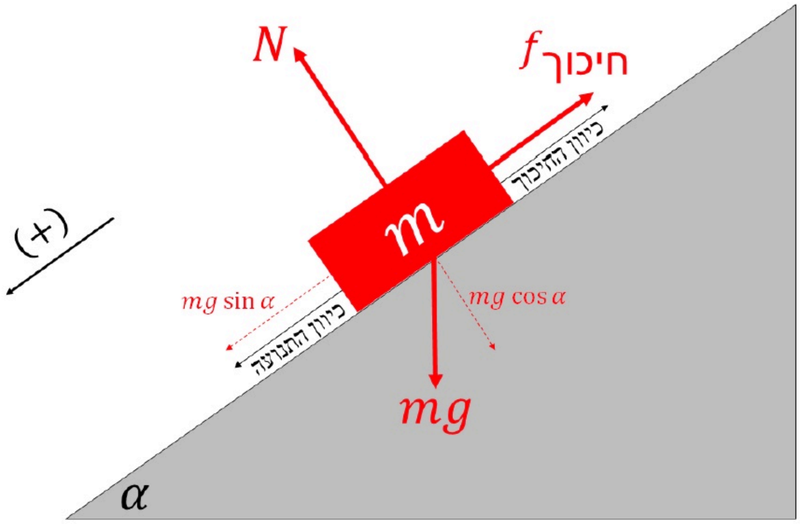
$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - f = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \tag{29}$$

ולאורך ציר Y :

$$m\ddot{y} = N - mg\cos\alpha = 0 \tag{30}$$

התנאי לתנועה (בכיוון X) יהיה כמובן $\ddot{x} > 0$, או

$$\sin\alpha > \mu\cos\alpha \quad \rightarrow \quad \tan\alpha > \mu \tag{31}$$



איור 6: גוף מחליק על מישור משופע, עם חיכוך.

5.3 צמיגות

כאשר גוף נע דרך נוזל או גז, פועל עליו כוח צמיגות (viscosity) .

כוח הצמיגות פועל בכיוון ווקטור המהירות, והפוך לכיוון המהירות:

$$\vec{F}_v = -C\vec{v} \tag{32}$$

כאשר C הוא קבוע התלוי בתכונות הנוזל/גז, וכן בצורת הגוף.

עבור גוף כדורי קטן הנע בהמהירות נמוכה (טכנית: במספר ריינולדס נמוך), מתקיים

$$\vec{F}_v = -6\pi\eta r\vec{v} \tag{33}$$

כאשר η הוא מקדם הצמיגות הדינמי של הנוזל. משוואה 33 נקראת **חוק סטוקס.**

במהירויות גבוהות תיווצר טורבולנציה שתגדיל מאוד את החיכוך (drag) .

דוגמה. נחשב את מהירותה הסופית של טיפת גשם, בקוטר אופייני של 1 מ"מ. צפיפות המים היא $\rho_w = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, ומקדם הצמיגות באוויר הוא $\eta = 1.8 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg/(m\cdot s)}$.

משוואת התנועה של הטיפה (הנופלת),

$$m\frac{dv}{dt} = -6\pi\eta r v + mg$$

ומסתה

$$m = \frac{4\pi}{3}\rho_w r^3$$

ולכן

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{9}{2}\frac{\eta v}{\rho_w r^2} + g$$

ובמצב יציב, $dv/dt = 0$

$$\frac{9}{2}\frac{\eta v_t}{\rho_w r^2} = g \quad\rightarrow\quad v_t = \frac{2}{9}\left(\frac{\rho_w r^2 g}{\eta}\right) \simeq 30\,m/s$$

(למעשה, המהירות האמיתית קטנה יותר, שכן הטיפה אינה כדורית, וכן נוצרת טורבולנציה).

משוואת התנועה של גוף הנע בנוזל צמיג (במימד אחד) תרשם כ-

$$\sum F = m\frac{dv}{dt} = -Cv \tag{34}$$

או

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{C}{m}v \equiv -\frac{1}{\tau}v \tag{35}$$

כאשר הגדרנו את הפרמטר (בעל יחידות זמן) $\tau \equiv m/C$.

משוואת 35 היא משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון, המתארת גוף שמהירותו משתנה בצורה הפרופורציונלית למהירות.

הדרך המהירה ביותר לפתור משוואה דיפרנציאלית היא לנחש פתרון, בהתבסס על אינטואיציה פיסיקלית. במקרה שלנו, הנגזרת פרופורציונלית לפונקציה עצמה. לכן נחפש פתרון מהצורה

$$v(t) = v_0 e^{-\alpha t}$$

גזירה תיתן

$$\frac{dv}{dt} = -\alpha v_0 e^{-\alpha t} = -\alpha v(t).$$

השוואה למשוואה 35 נותנת את הקבוע $\alpha = 1/\tau$. לכן פתרון המשוואה הוא

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau} \tag{36}$$

מהפתרון ברור גם ש- $v_0 = v(t=0)$ היא המהירות ההתחלתית.

הערה. ניתן גם לפתור את המשוואה 35 באופן פורמלי. נרשום

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dt}{\tau}$$

ונבצע אינטגרציה

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{v'} = -\int_0^t \frac{1}{\tau}dt$$

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{1}{\tau}t$$

$$\frac{v}{v_0} = e^{-t/\tau} \quad \rightarrow \quad v = v_0 e^{-t/\tau}$$

נתבונן בפתרון שקיבלנו. המהירות דועכת אקספוננציאלית. הקבוע τ נקרא **זמן הדעיכה האופייני**. לאחר זמן τ המהירות יורדת ל $e^{-1} \approx 0.37$ מערכה ההתחלתי.

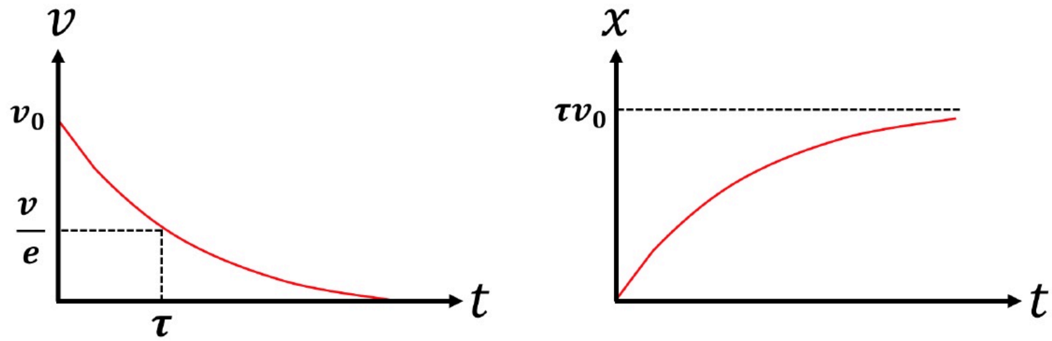
נקודה חשובה נוספת היא שלמרות שהמהירות לעולם אינה מתאפסת (מתימטית, לפחות), הגוף יכול לנוע רק מרחק סופי. נראה זאת על ידי אינטגרציה של משוואת המהירות למציאת המרחק:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t')dt' = \int_0^t v_0 e^{-t'/\tau}dt' = -v_0\tau e^{-t'/\tau}\Big|_0^t = v_0\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right). \tag{37}$$

(כאשר הינחנו $x_0 = 0$). בגבול $t \to \infty$ האקספוננט דועך ל-0, ונקבל

$$x(t\to\infty) \to v_0\tau$$

כלומר, סופי (ראה איור 7).



איור 7: שמאל: מהירות של גוף הנע בתוך צמיגי דועכת. ימין: המרחק שעובר הגוף שואף לערך סופי.

5.4 חוק הוק ואוסצילטור הרמוני פשוט

הפיסיקאי האנגלי Robert Hooke גילה ששינוי אורכו של קפיץ פרופורציונלי לגודל הכוח הפועל (בשני הכיוונים - מתיחה וכיווץ).

הכוח שמפעיל הקפיץ נתון ע"י **חוק הוק**,

$$F_s = -k(x - x_0) \tag{38}$$

כאשר x_0 הוא אורך הקפיץ בשיווי משקל, $x - x_0$ הוא העתק קצה הקפיץ מנקודת שיווי המשקל, ו- k הוא קבוע הנקרא **קבוע הקפיץ**.

הנקודה המהותית בחוק הוק היא שגודל הכוח הפועל הוא לינארי בהעתק, ופועל תמיד בכיוון להחזיר את הקפיץ למצב שיווי משקל: כאשר הקפיץ נמתח, $x > x_0$ גודל הכוח הוא שלילי, וכאשר הוא מכווץ, $x < x_0$ הכוח חיובי.

כפי שידוע כיום, חוק הוק (בצורה כזו או אחרת) מאפיין מערכות פיסיקליות רבות אשר קרובות מספיק לנקודת שיווי המשקל (כמו בקפיץ, אם הוא נמתח יותר מדי, חוק הוק שוב אינו תקף).

תנועת גוף על קפיץ המציית לחוק הוק נקראת **תנועה הרמונית פשוטה** (Simple Harmonic Motion) , והיא מאפיינת אין ספור מערכות פיסיקליות שונות.

על מנת לפתח את משוואות התנועה, נניח מסה m המחוברת לקפיץ. כמו כן (בלי הגבלת הכלליות) נניח $x_0 = 0$, כלומר x יכול להיות חיובי או שלילי (בסה"כ הזזנו את ראשית הצירים).

הבעיה במהותה היא חד מימדית. נרשום את חוק התנועה של ניוטון:

$$F = ma = m\ddot{x} = -kx \tag{39}$$

ומכאן

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x} \tag{40}$$

זוהי **משוואה דיפרנציאלית מסדר שני**, אותה יש לפתור על מנת לקבל את תנועת הגוף. <u>הערה:</u> בפתרון המשוואה נקבל שני קבועים (קבועי אינטגרציה), שכן במשוואה דיפרנציאלית מספר הקבועים שווה לסדר המשוואה.

על מנת לפתור את המשוואה, נוח להגדיר את הקבוע

$$\boxed{\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}} \tag{41}$$

ובכך לרשום את משוואת התנועה כ-

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega^2 x} \tag{42}$$

הערה: כל מערכת הניתנת לתיאור באמצעות משוואה מהצורה 42 נקראת **אוסצילטור הרמוני**.

5.4.1 פתרונות למשוואה

יש ענף שלם במתימטיקה שעוסק בפתרונות של משוואות דיפרנציאליות מסוגים שונים. המשוואה שלפנינו היא פשוטה במיוחד, ומספיקה אינטואיציה פיסיקלית על מנת לנחש את הפתרון. מאחר שהכוח מחזיר, הגוף נע בתנועה מחזורית. לכן ננחש פתרון מהצורה

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)} \tag{43}$$

כאשר A ו- B הם קבועים. לחלופין, נחפש פתרון מהצורה

$$\boxed{x(t) = C\cos(\omega t + \phi)} \tag{44}$$

כאשר C ו- ϕ הם קבועים.

נשים לב, ששני הפתרונות הם למעשה זהים, שכן מתקיים

$$C\cos(\omega t + \phi) = C\cos(\omega t)\cos(\phi) - C\sin(\omega t)\sin(\phi)$$

כך שנוכל לזהות

$$A \equiv C\cos(\phi), \quad B \equiv -C\sin(\phi)$$

שכן C, ϕ הם קבועים.

נגזור את משוואה 44 פעמיים, בכדי לקבל את המהירות והתאוצה:

$$\begin{aligned} v(t) &= \tfrac{dx}{dt} = -\omega C\sin(\omega t + \phi), \\ a(t) &= \tfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 C\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x \end{aligned} \tag{45}$$

ובכך הוכחנו שזה אכן הפתרון (על ידי הצבה).

הקבועים C, ϕ נקבעים על ידי תנאי ההתחלה של הבעיה, כלומר מצב המערכת בזמן $t = 0$. נסמן

$$x(t=0) \equiv x_0 \;\;,\;\; v(t=0) \equiv v_0$$

ונציב במשוואה 44 ובמשוואת המהירות:

$$C\cos(\phi) = x_0,$$

$$-\omega C\sin(\phi) = v_0$$

ועבור המקרה הפרטי שבו הגוף מתחיל ממנוחה, $v_0 = 0$, נקבל

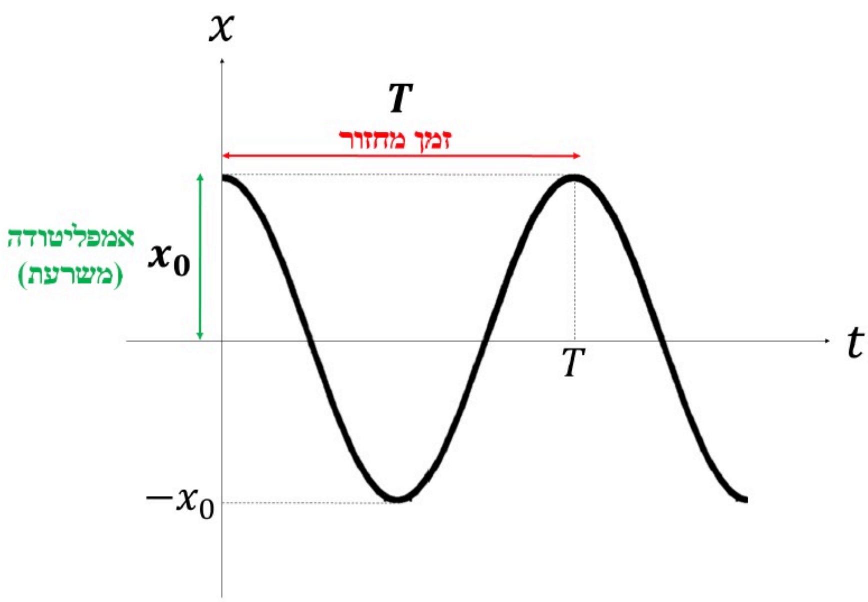
$$\begin{aligned} &\phi = 0 \;\;,\;\; C = x_0 \\ &\rightarrow \;\; x(t) = x_0\cos(\omega t) \;\;,\;\; v(t) = -\omega x_0\sin(\omega t) \;,\; a(t) = -\omega^2 x_0\cos(\omega t) \end{aligned}$$

(ראה איורים 8-10) .

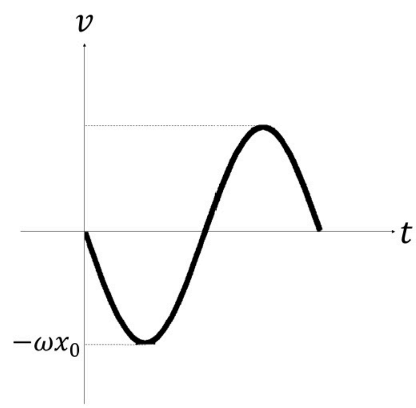
התנועה היא כמובן מחזורית בזמן. הגודל ω ידוע כ**מהירות הזוויתית**. הגוף חוזר לנקודת ההתחלה לאחר זמן T הנתון על ידי $\omega T = 2\pi$, ולכן T ידוע כ**זמן המחזור** של התנועה.

הקבוע C מבטא את המרחק המקסימלי (מנקודת שיווי המשקל), והוא ידוע כ**אמפליטודה (משרעת)** של התנועה. הזווית ϕ ידועה כ**פאזה** (או: זווית הפאזה).

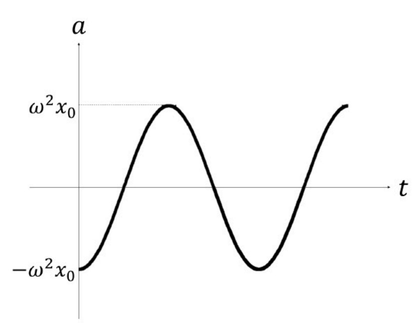
נשים לב לנקודה מהותית: מחזור התנועה (או התדירות שלה), אינו תלוי באמפליטודה. אם נמתח את הקפיץ יותר - נגדיל את משרעת התנועה, אך לא נשנה את תדירותה. פיסיקלית, הגדלת המשרעת מגדילה גם את התאוצה המחזירה, כך שהגוף, בנקודת שיווי המשקל, נע מהר יותר, כך שזמן המחזור לא משתנה.



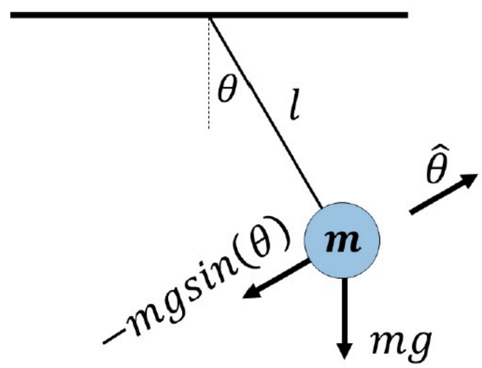
איור 8: גוף בתנועה הרמונית פשוטה משנה את מיקומו במרחב באופן מחזורי.



איור 9: המהירות של גוף בתנועה הרמונית פשוטה



איור 10: התאוצה של גוף בתנועה הרמונית פשוטה



איור 11: מטוטלת פשוטה

5.4.2 דוגמה: תנועת מטוטלת (פשוטה)

מטוטלת פשוטה (או מטוטלת מתימטית) מורכבת ממסה נקודתית התלויה מחוט חסר מסה. מטוטלת זו נעה בתנועה הרמונית פשוטה. נסמן את המסה ב- m ואת אורך החוט ב- l. דיאגרמת הכוחות על המסה מופיעה באיור 11:

המסה נעה בתנועה מעגלית במישור האנך. כאשר היא בזווית θ מהאנך, תאוצתה בכיוון $\hat{\theta}$ נתונה על ידי

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = l\ddot{\theta}$$

(ראה משוואה 7) שכן הרדיוס $r = l$ קבוע.

מדיאגרמת הכוחות המופיעה באיור 11, נרשום את חוק התנועה בציר θ,

$$\sum F_\theta = ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

או

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

למעשה, לא ניתן לפתור את המשוואה הזו באופן אנליטי.

ואולם, בזויות קטנות מתקיים $\sin\theta \approx \theta$ (כאשר הזווית נמדדת ברדיאנים). זה מתקבל מפיתוח טיילור של הפונקציה sin.

לכן, אם נכתוב $\omega = \sqrt{g/l}$ משוואת התנועה תהפך ל-

$$\ddot{\theta} \approx -\omega^2\theta,$$

שזו בדיוק משוואת התנועה של אוסצילטור הרמוני.

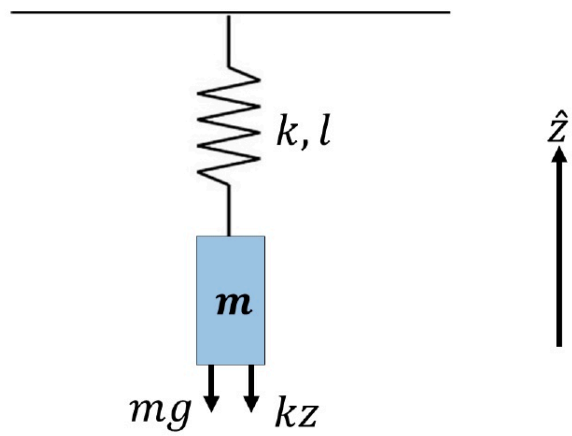
התנועה היא כמובן **מחזורית**, עם זמן מחזור הנתון על ידי $\omega T = 2\pi$ או

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

כלומר, זמן המחזור תלוי רק באורך החוט (ולא, למשל בזווית). זו הסיבה ששעוני מטוטלת היוו קפיצת מדרגה טכנולוגית - הם היו הרבה יותר מדוייקים (דיוק של שעון מטוטלת יכול להגיע לכדי מספר שניות ביממה) מכל מה שהומצא לפניהם.

5.4.3 דוגמה 2: מסה תלויה על קפיץ

כדוגמה אחרונה, נדון במסה התלויה על קפיץ במישור האנכי. הבעיה היא חד מימדית, במישור האנכי (ראה איור 12).



איור 12: מסה תלויה על קפיץ

משוואת התנועה:

$$\sum F_z = -kz - mg = m\ddot{z} \tag{46}$$

נשתמש בעובדה ש- m, g, k הם קבועים, בכדי לרשום את משוואת התנועה כ-

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(z + \frac{mg}{k}\right) = -\frac{k}{m}\left(z + \frac{mg}{k}\right) \tag{47}$$

לכן נגדיר $u = z + mg/k$, $\omega^2 = k/m$ ונרשום את משוואת התנועה כ-

$$\ddot{u} = -\omega^2 u \tag{48}$$

זוהי כמובן משוואת אוסצילטור הרמוני, עם הפתרון

$$u(t) = C\sin(\omega t + \phi)$$

ומכאן נקבל

$$z(t) = -\frac{mg}{k} + C\sin(\omega t + \phi)$$

כלומר, קיבלנו שהקפיץ נע בתנועה הרמונית סביב נקודת שיווי משקל חדשה - $z_0 = -\frac{mg}{k}$. בנקודה זו, כוח הקפיץ מאזן בדיוק את כוח הכובד.

רשימת מקורות

[1] Kleppner, D. & Kolenkow, R., *"An Introduction to Mechanics"* (Cambridge), second edition.
[2] Kittel, C., *"Mechanics"* (Berkeley Physics Course Vol. 1, McGraw-Hill);

תרגום לעברית על ידי האוניברסיטה הפתוחה