מכניקה - הרצאה 5: סיום משוואות דיפרנציאליות ותנע

אסף פאר

11 בדצמבר 2018

הערה חשובה: סיכומי ההרצאות מבוססים על הרצאותיהם של **ד״ר יוסי בן ציון** כפי שהוקלדו על ידי **מיי מרקמן**, ושל **פרופסור דייויד קסלר** . כמו כן, ההרצאות מבוססות על מקורות [1] ו-[2]. כל האיורים מועתקים מסיכומיה של מיי מרקמן.

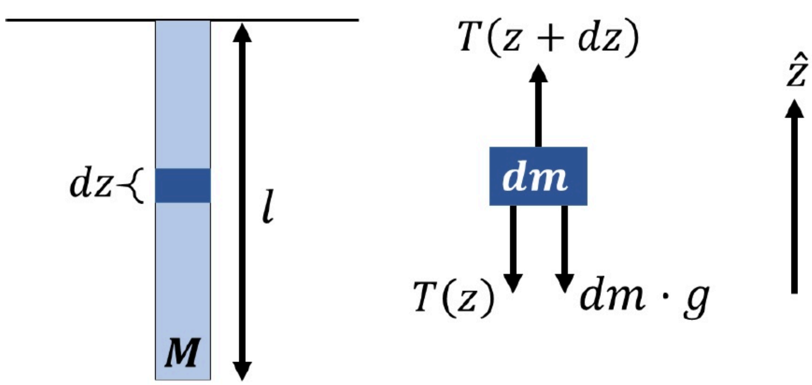
1 משוואות דיפרנציאליות: מתיחות בחבל

בדיונים על צמיגות ותנועה הרמונית, עשינו שימוש במשוואות דיפרנציאליות (מסדר ראשון ושני) לשם פתרון בעיה פיסיקלית.

כאן אני אביא דוגמה נוספת לשימוש במשוואת דיפרנציאלית בכדי לחשב מתיחות בחבל.

1.1 מתיחות בחבל תלוי

נניח חבל תלוי שאורכו l ומסתו הכוללת M. נניח שנקודת התלייה היא ב- $z = l$, ותחתית החבל תהיה ב- $z = 0$. אנחנו מעוניינים לחשב את המתיחות בכל נקודה בחבל.



איור 1: חבל תלוי בקצהו

1.1.1 חישוב דיפרנציאלי מלא

בכל נקודת אורך Δz ישנו אלמנט מסה $\Delta m = \frac{M}{l}\Delta z = \lambda \Delta z$ כאשר λ היא צפיפות המסה ליחידת אורך של החבל.

נפעיל את חוק התנועה של ניוטון על אלמנט המסה:

$$F_z = T(z + \Delta z) - T(z) - g\Delta m = 0 \tag{1}$$

כלומר

$$\frac{T(z+\Delta z)-T(z)}{\Delta z}=g\frac{\Delta m}{\Delta z}$$

בגבול $\Delta z\to 0$, אגף שמאל של המשוואה הוא נגזרת המתיחות לפי z. נציב את הביטוי ל- Δm באגף ימין, ונקבל

$$\frac{dT}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{T(z+\Delta z)-T(z)}{\Delta z}=g\frac{M}{l} \tag{2}$$

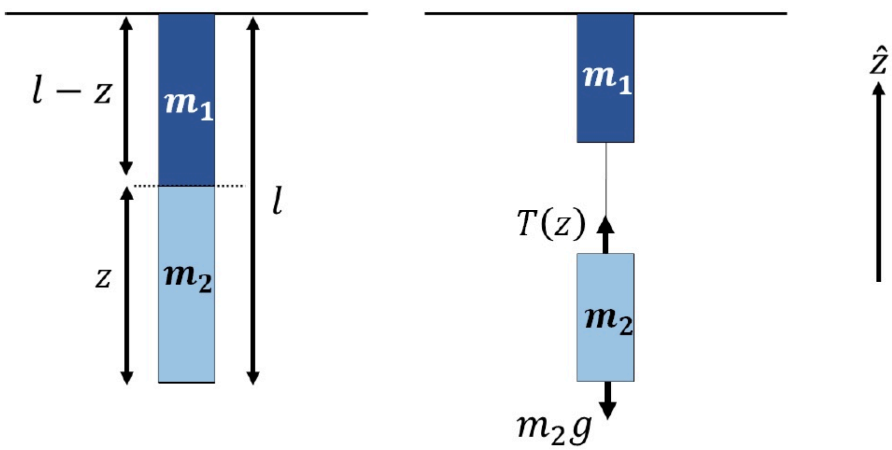
$$dT=\frac{gM}{l}dz$$

כעת, נותר לבצע אינטגרל על מנת למצוא את המתיחות בכל נקודה בגובה z. את קבוע האינטגרציה נמצא ע״י הסתכלות בתנאי ההתחלה: בקצה החבל ($z=0$) אין ״חבל נוסף״, ולכן המתיחות בנקודה זו חייבת להתאפס: $T(z=0)=0$. לכן נפתור:

$$\int_0^T dT=\int_0^z\frac{Mg}{l}dz \quad\rightarrow\quad T(z)=\frac{Mg}{l}z \tag{3}$$

1.1.2 פתרון אינטגרלי

את הבעיה הספציפית הזו ניתן לפתור בדרך שניה שאינה כוללת אלמנטים אינפיניטסימליים.
נתבונן בנקודה בגובה z ונחלק את החבל לשתי מסות נפרדות: מעל ומתחת לנקודה. $m_1=\frac{M}{l}(l-z)$, $m_2=\frac{M}{l}z$.



איור 2: חבל תלוי בקצהו - שיטה אינטגרלית

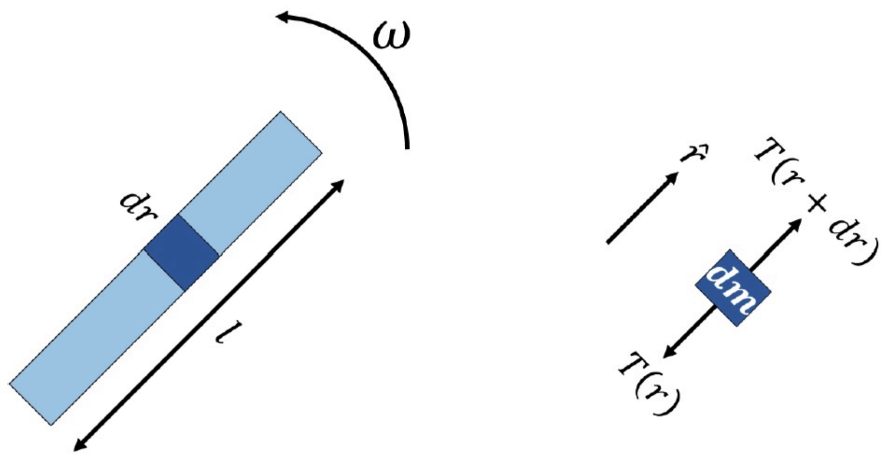
נרשום את חוק התנועה (החוק השני של ניוטון) על המסה התחתונה:

$$\sum F_z(m_2)=T(z)-m_2g=0 \tag{4}$$

ולכן

$$T(z)=\frac{Mg}{l}z$$

הערה: למרות שהשיטה השניה היא לכאורע ״יותר מהירה״, בפועל היא זהה לשיטה הראשונה - פשוט ביצענו את האינטגרציה קודם (בדוק!). לא תמיד הדבר אפשרי.



איור 3: חבל מסתובב

1.2 מתיחות בחוט מסתובב

נתבונן בחבל שאורכו l ומסתו M המחובר לציר ומסתובב במהירות זוויתית ω (ראה איור 3).
כמקודם, נחפש את המתיחות בחבל בכל נקודה. נתעלם מכוח הכבידה.
לבעיה זו סימטריה מעגלית, ולכן נוח להשתמש בקואורדינטות קוטביות.
נרשום את החוק השני של ניוטון לאלמנט מסה $\Delta m = \frac{M}{l}\Delta r$ בציר הרדיאלי:

$$\sum F_r = T(r+\Delta r) - T(r) = a_r \cdot \Delta m \tag{5}$$

נשתמש בביטוי עבור תאוצה מעגלית, $a_r = -\omega^2 r$, ונקבל:

$$\frac{T(r+\Delta r) - T(r)}{\Delta r} = -\omega^2 r \frac{\Delta m}{\Delta r} \tag{6}$$

נציב את הביטוי לאלמנט מסה בצד ימין, ובצד שמאל נזהה את הנגזרת:

$$\frac{dT}{dr} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{T(r+\Delta r) - T(r)}{\Delta r} = -\frac{M\omega^2}{l} r \tag{7}$$

תנאי השפה דורשים התאפסות המתיחות בקצה החבל: $T(r=l)=0$, ומכאן נפתור את האינטגרל:

$$\int_0^{T(r)} dT = -\frac{M\omega^2}{l}\int_l^r r' dr' \tag{8}$$

$$T(r) = \frac{M\omega^2}{2l}\left(l^2 - r^2\right). \tag{9}$$

2 תנע

2.1 מבוא

עד עתה, באופן מעשי פתרנו בעיות פיסיקליות הכוללות חלקיקים נקודתיים ואידיאליים. אולם כידוע, העולם לא אידיאלי. כעת נרצה להכליל את חוקי ניוטון כך שנוכל לפתור באמצעותם בעיות ברמת סיבוכיות גבוהה יותר.

ראשית, כפי שציינתי בשיעור 3, ניתן להכליל את חוק התנועה של ניוטון לגוף אשר מסתו משתנה עם הזמן (דוגמה קלאסית היא רקטה, אשר שורפת דלק במעופה). חוק התנועה של ניוטון נרשם כ-

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \equiv \frac{d\vec{p}}{dt}} \tag{10}$$

כאשר הווקטור p נקרא **התנע** של הגוף.

כמובן, שבמקרה שבו מסת הגוף אינה משתנה בזמן, משוואה 10 הופכת להיות משוואת התנועה שהיכרנו קודם.

נשים לב, שיחידות התנע (במערכת SI) הם $[p] = kg \cdot m/s$.

2.2 דינמיקה של מערכת של חלקיקים

נתבונן במערכת המכילה מספר N של חלקיקים המבצעים אינטרקציות בינם לבין עצמם. (אנחנו מניחים כאן שלחלקיקים מסה קבועה). בנוסף לכוחות שהחלקיקים מפעילים על עצמם (הנקראים **כוחות פנימיים**) יתכן שעל המערכת פועלים כוחות חיצוניים לה - לדוגמה, כוח הכובד או כוח חשמלי, או אינטרקציות עם חלקיקים שאינם חלק מהמערכת, וכו'.

על מנת שהדיון כאן יהיה כללי, נניח שבמערכת שלנו יש N חלקיקים, אשר מסותיהם $m_1, m_2, ..., m_N$. את המיקום של החלקיק ה- j נסמן ב- $\vec{r_j}$, את התנע שלו ב- $\vec{p_j} = m_j \cdot \vec{r_j}$, ואת שקול הכוחות הפועלים עליו ב- $\vec{f_j}$.

משוואת התנועה של החלקיק ה- j היא אם כך

$$\vec{f_j} = \frac{d\vec{p_j}}{dt}. \tag{11}$$

את הכוח הפועל על החלקיק נחלק ל-2: כוח המופעל על ידי חלקיקים מתוך המערכת, $\vec{f}_j^{int}$ וכוח המופעל על ידי גורם חיצוני למערכת, $\vec{f}_j^{ext}$:

$$\vec{f_j} = \vec{f}_j^{int} + \vec{f}_j^{ext}. \tag{12}$$

מכאן, שמשוואת התנועה לחלקיק ה-j נרשמת כ-

$$\vec{f}_j^{int} + \vec{f}_j^{ext} = \frac{d\vec{p_j}}{dt}. \tag{13}$$

כעת מגיע הטריק: נחבר את משוואות התנועה של כל החלקיקים במערכת. נקבל:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{f}_j^{int} + \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_j^{ext} = \sum_{j=1}^{N} \frac{d\vec{p_j}}{dt}. \tag{14}$$

נתבונן באיבר הראשון מצד שמאל. זהו סכום כל הכוחות הפנימיים במערכת. אבל לפי החוק השלישי של ניוטון, הכוח שחלקיק i מפעיל על חלקיק j שווה בגודלו והפוך בכיוונו לכוח שחלקיק j מפעיל על חלקיק i. לכן, בסכימה, כוחות אלה מבטלים אחד את השני. הדבר נכון לכל צמד כוחות פנימיים, ולכן סך הכל, האיבר הראשון מצד ימין מתאפס:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{f}_j^{int} = 0.$$

האיבר השני מצד ימין, הוא סכום כל הכוחות החיצוניים המופעלים על כלל החלקיקים במערכת. נסמן אותו ב-

$$\vec{F}_{ext} \equiv \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_j^{ext}. \tag{15}$$

ונקבל את משוואת התנועה

$$\vec{F}_{ext} = \sum_{j=1}^{N} \frac{d\vec{p}_j}{dt} \tag{16}$$

כמו כן, מאחר ש- $\vec{p}_j$ הוא וקטור, ניתן להחליף סכימה ונגזרת. לכן נגדיר את **התנע הכללי** של המערכת על ידי

$$\vec{p} \equiv \sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\vec{r}}_j \tag{17}$$

ונקבל סה"כ:

$$\boxed{\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \tag{18}$$

כלומר: **שקול הכוחות החיצוניים הפועל על המערכת שווה לקצב שינוי התנע הכללי של המערכת.** במילים אחרות, התנע הכללי של המערכת אינו מושפע מהכוחות הפנימיים הפועלים בתוך המערכת.

! נשים לב: למרות שמשוואה 18 נראית זהה למשוואת החוק השני של ניוטון שפיתחנו קודם, כאן אנחנו דנים במערכת רבת חלקיקים.

3 מרכז המסה

נמשיך עם האנלוגיה בין מערכת רבת חלקיקים ובין חלקיק יחיד, על ידי כתיבת משוואת התנועה כ-

$$\boxed{\vec{F} \equiv \vec{F}_{ext} = M\ddot{\vec{R}} \equiv M\ddot{\vec{R}}_{CM}} \tag{19}$$

כאן, M היא המסה הכוללת של המערכת,

$$M \equiv \sum_{j=1}^{N} m_j \tag{20}$$

ואת הווקטור $\vec{R} \equiv \vec{R}_{CM}$ **נגדיר באמצעות חוק התנועה,**

$$M\ddot{\vec{R}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{\vec{r}}_j \tag{21}$$

או

$$\boxed{\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_j m_j \vec{r}_j = \frac{\sum_j m_j \vec{r}_j}{\sum m_j}} \tag{22}$$

(נשים לב, כי בבעיה זו, של N חלקיקים, אין שינוי מסה לאף חלקיק).

כלומר, קיבלנו שבמערכת בעלת N חלקיקים, ניתן להגדיר נקודה - הנקראת **מרכז המסה** ומיקומה $\vec{R}_{CM}$. בהינתן כוחות חיצוניים, מרכז המסה מתנהג בהתאם לחוק התנועה של ניוטון, כאילו כל מסת הגוף ממוקמת בנקודה זו.

תכונה זו מאפשרת לנו לנתח תנועה של כל גוף מאקרוסקופי על ידי הפרדתה לשני רכיבים: תנועת מרכז המסה - המושפעת רק על ידי כוחות חיצוניים, ותנועת הגוף סביב מרכז המסה - בה נדון בהמשך הקורס.

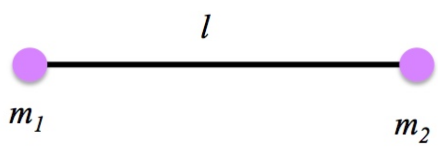
3.1 מציאת מרכז המסה של גוף

באופן עקרוני, חלוקת הגוף לאלמנטי מסה אינפיניטסימליים וסכימה (או אינטגרציה) של משוואה 22 מאפשרים לחשב את מרכז המסה של כל גוף. כאן נתבונן במספר דוגמאות פשוטות.

3.1.1 שתי מסות המחוברות למקל

אולי הדוגמה הפשוטה ביותר היא של שתי מסות, m_1 ו- m_2 המחוברות על ידי מקל (חסר מסה) באורך l. נניח שהמסות הן על ציר x. כמו כן, נניח שהמסה הראשונה נמצאת ב- $x = 0$, ומכאן שהמסה השניה נמצאת ב- $x = l$. ממשוואה 22 נקבל מיד ש-

$$X_{CM} = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}.$$



איור 4: שתי מסות מחוברות עם מקל

3.1.2 מרכז מסה של מוט

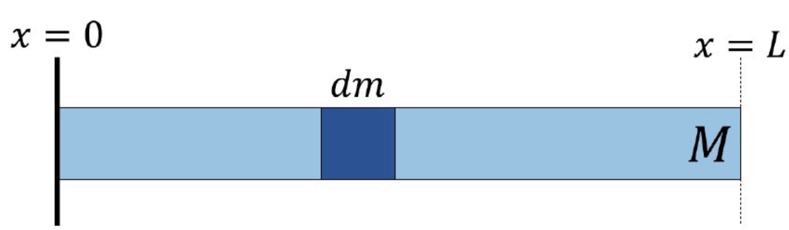
נחשב את מרכז המסה של מוט אחיד, שאורכו L ומסתו הכוללת M. המוט מונח על ציר ה- x בין $x = 0$ ו- $x = L$. המוט הוא גוף רציף, ולפיכך יש להחליף את הסכום במשוואה 22 באינטגרל:

$$\boxed{X_{CM} = \frac{\int x dm}{\int dm}} \tag{23}$$

האינטגרל במכנה הוא המסה הכוללת: $\int dm = M$.

בחישוב האינטגרל במונה, נשים לב שאלמנט מסה נתון ע״י $dm = \frac{M}{L}dx$, ולכן המונה שווה ל-

$$\int x dm = \frac{M}{L}\int_0^L x dx = \frac{ML}{2} \tag{24}$$



איור 5: מקל בעל צפיפות מסה אחידה

ולכן סה״כ נקבל

$$X_{CM} = \frac{L}{2}$$

באופן לא מפתיע, מרכז המסה של המוט נמצא באמצעו.

3.1.3 מרכז מסה של משולש אחיד

נניח שנתונה לנו פלטה משולשת אחידה (ראה איור 6). מהו מרכז המסה ?

ראשית, נשים לב שמטעמי סימטריה מתקיים $Y_{CM}=0$. אכן, במקרים רבים, סימטריה מאוד שימושית במציאת מרכז מסה של גופים.

עלינו לחשב אם כך את X_{CM}. נחלק את המשולש למוטות בציר y אשר לכל מוט אלמנט מסה dm. כיוון שאורך ה-"מוט" תלוי במיקומו לאורך ציר x, כך גם אלמנט המסה. גובה המוט מתון ע"י:

$$h(x)=2\left(a-a\frac{x}{b}\right)$$

ולכן שטח המוט, אשר ניתן לקרב אותו באמצעות מלבן בעל רוחב אינפיניטסימלי הוא

$$dA=h(x)dx=2a\left(1-\frac{x}{b}\right)dx$$

על מנת לחשב את אלמנט המסה במוט, נשים לב כי שטח הפלטה כולה הוא $S=a\cdot b$, ולכן צפיפות המסה המשטחית (= מסה ליחידת משטח) היא $\sigma=\frac{M}{ab}$. מכאן נקבל את אלמנט מסת המלבן:

$$dm=\sigma dA=\frac{2M}{b}\left(1-\frac{x}{b}\right)dx$$

נחזור למשוואה 23 ונחשב את המונה:

$$\int xdm=\frac{2M}{b}\int_0^b x\left(1-\frac{x}{b}\right)dx=\frac{2M}{b}\int_0^b\left(x-\frac{x^2}{b}\right)dx=\frac{2M}{b}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{b^2}{3}\right)=\frac{Mb}{3} \quad (25)$$

המכנה של משוואה 23 נותן $\int dm=M$ ולכן סה"כ

$$X_{CM}=\frac{b}{3}$$

או, מרכז המסה הוא

$$\vec{R}_{CM}=\left(\frac{b}{3},0\right).$$

4 חוק שימור התנע וקואורדינטות מרכז המסה

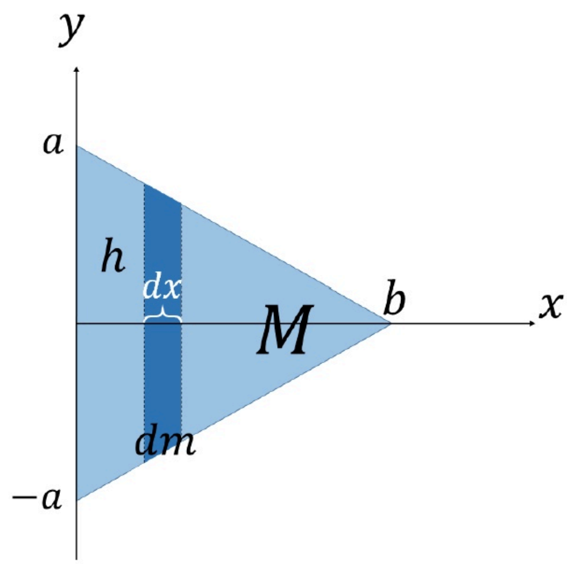
במשוואה 18 ראינו שבמערכת הכוללת מספר חלקיקים, שקול הכוחות החיצוניים שווה לשינוי התנע הכללי של המערכת:

$$\vec{F}_{ext}=\frac{d\vec{p}}{dt} \quad ; \quad \vec{p}\equiv\sum_{j=1}^{N}\vec{p}_j=\sum_{j=1}^{N}m_j\dot{\vec{r}}_j$$

בפרט, נקבל כי בהעדר כוחות חיצוניים, התנע הכללי של המערכת נשאר קבוע בזמן:

$$\boxed{\sum\vec{F}_{ext}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sum\vec{p}_j=const \quad \left(\frac{d\vec{p}}{dt}=0\right)} \quad (26)$$

כלומר: התנע הכללי של מערכת המבודדת מכוחות חיצוניים נשמר - ללא תלות באינטרקציות, חזקות ככל שתהינה בין החלקיקים המרכיבים את המערכת. חוק זה (משוואה 26) נקרא **חוק שימור התנע (הקווי)**. חוק זה, למרות פשטותו, מהווה כלי חזק ביותר להבנת ההתנהגות של מערכות פיסיקליות מורכבות.



איור 6: פלטה משולשת בעלת צפיפות מסה אחידה

! **הערה:** בפיתוח שלנו, חוק שימור התנע נובע ישירות מהחוק השלישי של ניוטון. ואולם, ידוע היום כי חוק שימור התנע תקף גם במערכות שאינן מצייתות לחוקי ניוטון - כמו מערכות קוונטיות או יחסותיות. לכן, בפיסיקה המודרנית, חוק שימור התנע נחשב חוק בסיסי יותר מחוקי ניוטון. בראיה זו, החוק השלישי של ניוטון הוא תוצאה של חוק שימור התנע, ולא להיפך.

דוגמה - איש קופץ מעגלה

כדוגמה פשוטה נניח אדם שמסתו m עומד על עגלה שמסתה M הניצבת ללא תנועה על מישור נטול חיכוך. האיש קופץ מהעגלה לכיוון שמאל במהירות אופקית v_0. בעיקבות הקפיצה, העגלה תנוע ימינה. מאחר שלא פועלים כוחות חיצוניים (בציר x), נשתמש בחוק שימור התנע על מנת לחשב את מהירות העגלה.

במצב ההתחלתי, אין תנועה, ולכן

$$p_x^{initial} = 0$$

מיד לאחר הקפיצה, האיש נע שמאלה במהירות v_0. העגלה תנוע ימינה - נסמן את מהירותה ב- u_0.

לכן התנע הסופי של המערכת הוא

$$p_x^{final} = Mu_0 - mv_0$$

בהעדר כוחות חיצוניים בציר ה- x, נשתמש בחוק שימור התנע בכדי לרשום

$$p_x^{final} = p_x^{initial}$$

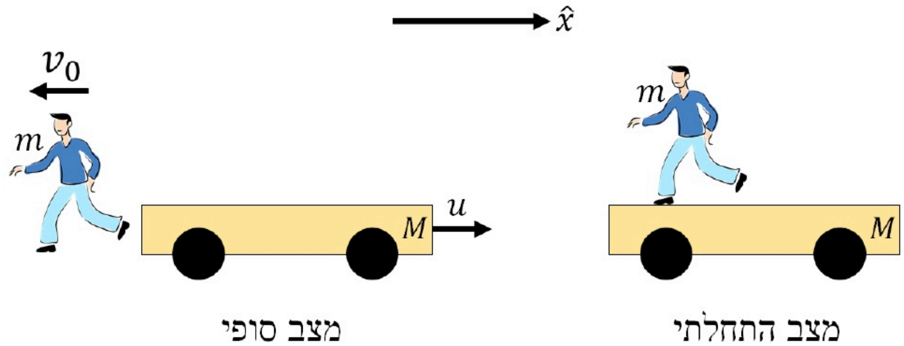
ומכאן

$$u_0 = \frac{m}{M} v_0$$

4.1 מערכת מרכז המסה

כפי שהדגשנו לא פעם, בחירת מערכת הקואורדינטות היא שרירותית- תלויה בבחירתו של כל צופה. בחירה חכמה של מערכת קואורדינטות יכולה לפשט מאוד פתרון של בעיה.

במערכת מבודדת, לעיתים קרובות מאוד טוב לבחור בקואורדינטות מרכז המסה- קואורדינטות בהן מרכז המסה של המערכת נמצא תמיד בראשית.



איור 7: איש קופץ מעגלה

על מערכת מבודדת לא פועלים כוחות חיצוניים. לכן, תנועת מרכז המסה היא פשוטה - מרכז המסה קבוע, או נע במהירות קבועה. לכן, במערכת בת שני חלקיקים, לדוגמה, כשעובדים במערכת מרכז המסה אם ידועה תנועתו של חלקיק אחד, ידועה גם באופן מיידי תנועתו של החלקיק השני.

נניח מערכת המורכבת משני חלקיקים, בעלי מסות m_1 ו- m_2, ומיקומים $\vec{r}_1(t)$ ו- $\vec{r}_2(t)$ כפי שנמדדים על ידי הצופה - כלומר, במערכת המעבדה.

בהגדרה, מיקום מרכז המסה של המערכת (כפי שנמדד במערכת המעבדה) הוא

$$\vec{R}_{CM}(t)=\frac{m_1\vec{r}_1(t)+m_2\vec{r}_2(t)}{m_1+m_2}. \tag{27}$$

נגדיר כעת את מערכת מרכז המסה כמערכת שמרכזה ב- $\vec{R}$. נסמן את הקואורדינטות שלה ב- x', y', z'.

מיקום כל חלקיק בקואורדינטות מרכז המסה נתון ע״י

$$\begin{aligned}\vec{r}_1' &= \vec{r}_1-\vec{R}\\ \vec{r}_2' &= \vec{r}_2-\vec{R}.\end{aligned} \tag{28}$$

ולכן מתקיים

$$m_1\vec{r}_1'+m_2\vec{r}_2'=m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2-(m_1+m_2)\vec{R}=0 \tag{29}$$

(למעשה, התוצאה מגיעה ישירות מהגדרת מערכת מרכז המסה), כך שאם ידוע מיקומו של חלקיק אחד, ניתן למצוא את מיקומו של החלקיק השני באופן מיידי.

4.1.1 דוגמה: שתי מסות קשורות בקפיץ.

נתונה מערכת של שתי מסות זהות, $m_1=m_2=m$ המחליקות על משטח ישר ונטול חיכוך. המסות מחוברות זו לזו בקפיץ, עם קבוע k ואורך (במצב רפוי) l. ניתן להזניח את מסת הקפיץ בבעיה.

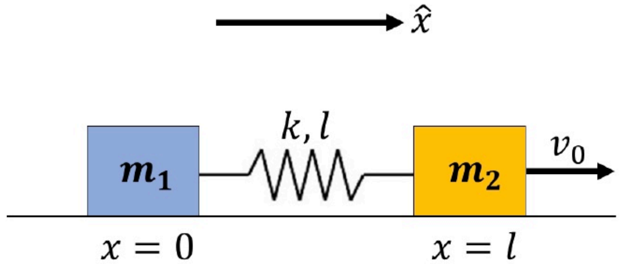
המערכת נמצאת במנוחה. בזמן $t=0$, המסה הימנית נחבטת, ומקבלת מהירות התחלתית v_0 בכיוון ימין (ראה איור 8). נמצא את מהירות כל אחת מהמסות כפונקציה של הזמן $t>0$.

לפי הגדרת הבעיה, אין חיכוך. לכן, מרכז המסה נע במהירות קבועה ימינה - ולכן מערכת מרכז המסה היא מערכת אינרציאלית. מיקום מרכז המסה נתון ע״י

$$X_{CM}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=\frac{1}{2}\left(x_1+x_2\right). \tag{30}$$

כלומר, מרכז המסה נמצא תמיד באמצע בין המסות.

$m_1 = m_2 \equiv m$



איור 8: שתי מסות מחוברות בקפיץ ומחליקות.

נעבור למערכת מרכז המסה. במערכת זו, מיקום המסות הוא

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - X_{CM} = \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2) \\ x_2' &= x_2 - X_{CM} = \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1) = -x_1'. \end{aligned} \tag{31}$$

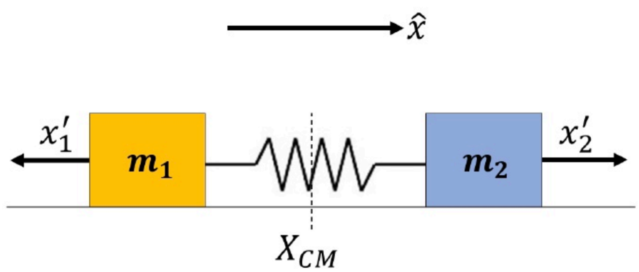
אורך הקפיץ אינו משתנה במעבר ממערכת המעבדה למערכת מרכז המסה, שכן

$$x_1 - x_2 = x_1' - x_2' \tag{32}$$

הכוח שמפעיל הקפיץ - לפי חוק הוק, פרופורציונלי ל- $x_1 - x_2 - l = x_1' - x_2' - l$. לכן נרשום את חוק התנועה של ניוטון,

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1' &= k(x_2' - x_1' - l) \\ m\ddot{x}_2' &= -k(x_2' - x_1' - l) \end{aligned} \tag{33}$$

(שכן מאיור 9 x_1' הוא בכיוון השלילי).



איור 9: מיקום המסות במערכת מרכז המסה

נחסר את המשוואות:

$$m(\ddot{x}_2' - \ddot{x}_1') = -2k(x_2' - x_1' - l) \tag{34}$$

נגדיר משתנה חדש: $u \equiv x_2' - x_1' - l$ ונוכל לרשום את המשוואה כ-

$$m\ddot{u} + 2ku = 0 \tag{35}$$

זוהי כמובן משוואת אוסצילטור הרמוני, ופתרונה

$$u = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

כאשר $\omega = \sqrt{2k/m}$.

בכדי להשלים את הפתרון, נציב את תנאי השפה בזמן $t = 0$: בזמן זה הקפיץ אינו מתוח, ולכן $u(t=0) = 0 \to B = 0$, וכן $\dot{u}(t=0) = \dot{x}_2' - \dot{x}_1' = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = v_0 = A\omega$ (השוויון האחרון מגיע מהגדרת u), ולכן $A = v_0/\omega$.

סה"כ נקבל

$$u = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t), \quad \dot{u} = v_0\cos(\omega t).$$

מאחר ש- $\dot{u} = \dot{x}_2' - \dot{x}_1'$ וכן $\dot{x}_2' = -\dot{x}_1'$ נקבל

$$v_2' = -v_1' = \frac{1}{2}v_0\cos(\omega t). \tag{36}$$

נחזור למערכת המעבדה. מהירות מערכת מרכז המסה היא $\dot{R}_{CM} = \frac{1}{2}\left(v_a(t=0) + v_b(t=0)\right) = \frac{1}{2}v_0$ ולכן

$$\begin{array}{l} v_1 = \frac{v_0}{2}\left(1 - \cos(\omega t)\right); \\ v_2 = \frac{v_0}{2}\left(1 + \cos(\omega t)\right) \end{array} \tag{37}$$

אינטגרציה תיתן את המיקום,

$$\begin{array}{l} x_1 = \frac{v_0 t}{2} - \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t); \\ x_2 = \frac{v_0 t}{2} + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + l. \end{array} \tag{38}$$

במילים - המסות מבצעות תנודות בכיוונים נגדיים סביב מרכז המסה שנע במהירות קבועה.

רשימת מקורות

[1] Kleppner, D. & Kolenkow, R., *"An Introduction to Mechanics"* (Cambridge), second edition.
[2] Kittel, C., *"Mechanics"* (Berkeley Physics Course Vol. 1, McGraw-Hill);

תרגום לעברית על ידי האוניברסיטה הפתוחה