מכניקה - הרצאה 6: תנע II

אסף פאר

16 ביוני 2020

הערה חשובה: סיכומי ההרצאות מבוססים על הרצאותיהם של **ד״ר יוסי בן ציון** כפי שהוקלדו על ידי **מיי מרקמן**, ושל **פרופסור דייוד קסלר** . כמו כן, ההרצאות מבוססות על מקורות [1] ו-[2]. כל האיורים מועתקים מסיכומיה של מיי מרקמן.

1 חוק שימור התנע - המשך

כפי שראינו בשיעור הקודם, סכום הכוחות חיצוניים הפועל על מערכת שווה לשינוי התנע הכללי שלה, כלומר

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{1}$$

בפרט, כאשר המערכת מבודדת מכוחות חיצוניים, התנע הכללי שלה נשמר

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0} \tag{2}$$

משוואה 2 נקראת **חוק שימור התנע (הקווי).** הנקודה המהותית היא שבהעדר כוחות חיצוניים התנע נשמר, ללא תלות בכוחות הפנימיים הפועלים בתוך המערכת.

דוגמה. נניח תותח (בעל מסה M) היורה פגז (בעל מסה m) בזווית θ. הפגז נע במהירות v_0 ביחס לתותח. בהנחה שהתותח נמצא על משטח נטול חיכוך, נרצה למצוא את מהירותו הסופית של התותח.

המערכת שלנו כוללת תותח ופגז. על המערכת פועלים כוחות חיצוניים - כבידה והכוח הנורמלי שמפעיל המשטח עליו נמצא התותח.

התנע לפני הירי הוא כמובן 0,

$$\vec{p}_i = 0$$

הכוחות הפועלים על המערכת הם בציר y בלבד. כלומר, לא פועלים כוחות בציר x . מחוק שימור התנע בציר x נקבל

$$p_{x,i} = p_{x,f}$$

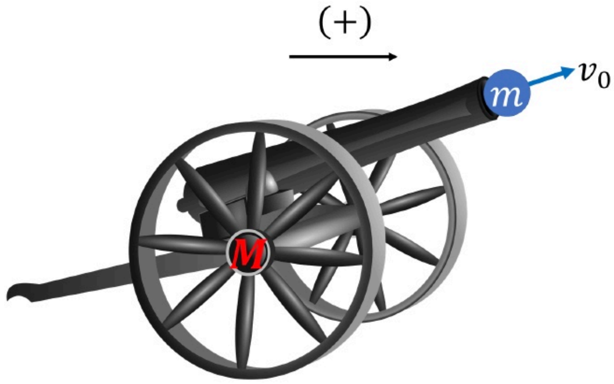
לאחר הירי, התותח ינוע שמאלה במהירות u, ולכן התנע שלו הוא $-Mu$.

הפגז נע ביחס לתותח במהירות

$$v_{m-cannon} = v_0 \cos\theta \hat{x} + v_0 \sin\theta \hat{y}$$

הנקודה העדינה היא לשים לב שבזמן שהפגז עוזב את התותח (כלומר, מסיים את ההאצה שלו), התותח כבר נמצא בתנועה במהירות $-u\hat{x}$. לכן, מהירות הפגז ביחס לקרקע היא

$$v_{m-ground} = (v_0 \cos\theta - u)\hat{x} + v_0 \sin\theta \hat{y}$$



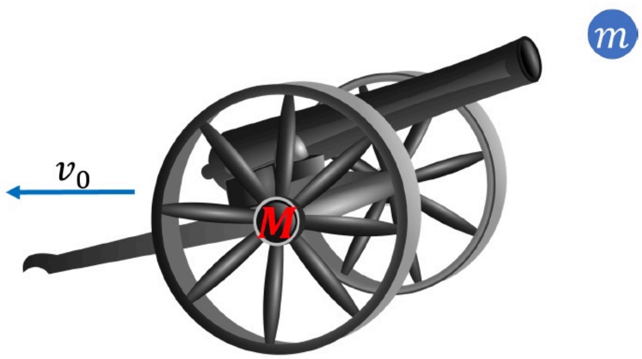
איור 1: תותח לפני ירי

חוק שימור התנע בציר x יתן

$$0 = -Mu + m(v_0\cos\theta - u) = 0$$

כלומר

$$u = \frac{mv_0\cos\theta}{M+m}$$



איור 2: תותח ופגז לאחר הירי

2 מתקף

חוק התנועה של ניוטון נותן את היחס בין הכוח ושינוי התנע,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{3}$$

רשמנו את החוק בצורה דיפרנציאלית - כלומר, תוך שימוש בנגזרת (בצד ימין). נוכל תמיד לבצע אינטגרציה בזמן, ולרשום

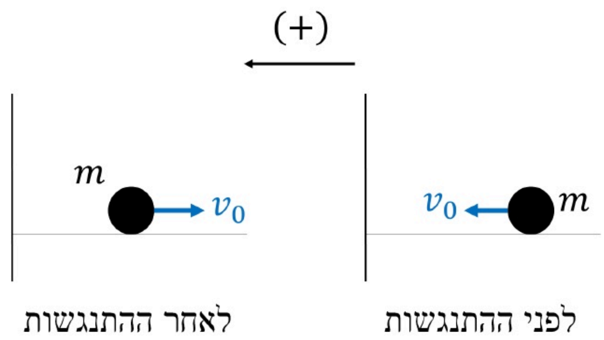
$$\boxed{\vec{J} \equiv \int_0^t \vec{F}dt = \vec{p}(t) - \vec{p}(0) = \Delta\vec{p}} \tag{4}$$

במילים: השינוי בתנע של המערכת בין זמן 0 ל- t נתון ע"י אינטגרציה של הכוח הפועל בזמן זה. גודל זה נקרא **מתקף** ומסומן ב- $\vec{J}$.

כמובן שהמשוואה זהה מבחינה מתימטית למשוואת החוק השני של ניוטון. היתרון בה לכן הוא בהבנה הפיסיקלית שהיא נותנת: בהינתן שינוי תנע ידוע, הוא יכול להתקיים כתוצאה מכוח חלש הפועל לאורך זמן, או לחלופין כוח חזק הפועל לזמן קצר מאוד (דוגמת תאונת דרכים, חס וחלילה).

דוגמה.

נתון כדור גומי המתנגש בקיר ומוחזר ממנו. זמן ההתנגשות קצר מאוד - חלקי שניה. נחשב את השינוי בתנע והמתקף.



איור 3: כדור מתנגש בקיר

לפני ההתנגשות, תנע הכדור הוא $p_i = mv_0$. בהנחה שהכדור עשוי גומי, גודל מהירותו לאחר ההתנגשות כמעט ולא משתנה, ולכן נכון לרשום $p_f = -mv_0$.

לכן, הפרש התנע של הכדור הוא

$$\Delta p = p_f - p_i = -mv_0 - mv_0 = -2mv_0$$

הכוח הממוצע שהקיר הפעיל על הכדור, במשך Δt שניות הוא

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{-2m\vec{v}_0}{\Delta t}$$

ומכאן שהמתקף הוא

$$\vec{J} = \langle \vec{F} \rangle \Delta t = -2m\vec{v}_0$$

שווה כמובן להפרש בתנע.

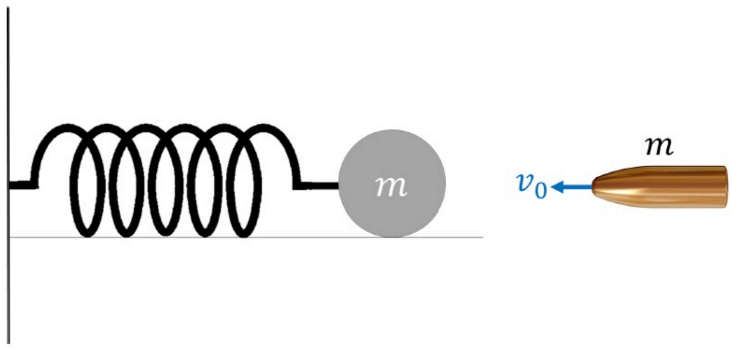
הדוגמה הזאת מבהירה מדוע התנגשויות מהירות הן מסוכנות: הכוח הפועל הופכי לזמן ההתנגשות. כך שגם אם שינוי התנע הוא קטן יחסית, אם הוא מתרחש בזמן מהיר הכוח הפועל יכול להיות עצום. זאת הסיבה שמכת פטיש יכולה לשבור קיר, או לחלופין מדוע תאונות דרכים הן מסוכנות כל כך. אמצעי בטיחות מודרנים כמו כריות אוויר לא יכולים לשנות את שינוי התנע בהתנגשות (המהירות נקבעת ע"י הנהג) אבל מנסים להאריך ככל הניתן את זמן ההתנגשות.

דוגמה נוספת היא פעילות אינסטינקטיבית של חיות - כולל כמובן אנשים- כאשר הם קופצים מגובה מסויים לאדמה. על מנת לא לשבור עצמות, אנחנו מכופפים את הברכיים ובכך מאריכים את משך הזמן שהגוף שלנו סופג את הזעזוע.

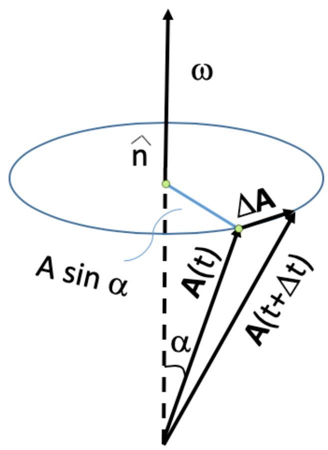
2.1 דוגמה (2): מדידת מהירות של קליע

על מנת למדוד את מהירותו של קליע רובה, אין צורך באמצעים מיוחדים. לצורך זה, נשתמש בקפיץ אשר אליו מחובר בלוק עץ שמסתו M . לקפיץ קבוע k ואורך מנוחה l . כמו כן, הוא מונח על משטח חסר חיכוך. לקליע מסה m ומהירות התחלתית (לפני הפגיעה) v_0.

לאחר הפגיעה, הקליע נתקע בעץ, והם נעים יחד במהירות (התחלתית) u_i.



איור 4: מערכת למדידת מהירות קליע



איור 5: כדור מתנגש בקיר

מחוק שימור התנע נקבל את הקשר

$$mv_0 = (M+m)u_i \quad \to u_i = \frac{mv_0}{m+M}$$

לאחר ההתנגשות הקפיץ מתחיל להתכווץ. משוואת התנועה היא כמובן

$$(M+m)\ddot{x} = -kx$$

עם תנאי התחלה $x(0)=0, \dot{x}(0)=u_i$. פתרון המשוואה הוא

$$x = A\sin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}.$$

גזירה נותנת

$$u_i = \dot{x} = A\omega\cos(\omega t), \quad \to \quad A = \frac{u_i}{\omega}$$

ומכאן נקבל

$$x(t) = \tfrac{u_i}{\omega}\sin(\omega t),$$
$$v(t) = u_i\cos(\omega t).$$

כעת נחשב את זמן העצירה וממנו את המתקף. זמן העצירה נתון ע"י

$$v(t_f)=0 \quad \rightarrow \omega t_f=\frac{\pi}{2} \quad \rightarrow t_f=\frac{\pi}{2\omega}$$

ומרחק העצירה:

$$x(t_f)=\frac{u_i}{\omega}=\frac{mv_0}{\sqrt{k(M+m)}} \quad \rightarrow v_0=\sqrt{\frac{k(M+m)}{m}}x(t_f)$$

מכאן נחשב את המתקף:

$$\begin{aligned} J &= \int F dt=-k\int x(t)dt \\ &= -k\int_0^{t_f}\frac{u_i}{\omega}\sin(\omega t) \\ &= \frac{ku_i}{\omega^2}\cos(\omega t)\Big|_0^{t_f} \\ &= \frac{ku_i}{\omega^2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right]=-\frac{ku_i}{\omega^2} \end{aligned}$$

נציב את ω ונקבל

$$J=-u_i(M+m)$$

הערה: למעשה, יכולנו לחשב את המתקף בצורה מהירה יותר, תוך זיהוי העובדה שהמתקף שווה לשינוי בתנע, $\vec{J}=\Delta\vec{p}$
מחוק שימור התנע, התנע מייד אחרי ההתנגשות שווה לתנע מיד לפני ההתנגשות, $p_i=u_i(M+m)$. התנע מינימלי ברגע הכיווץ המקסימלי, שאז $p_f=0$.
מכאן עולה מיד ש-

$$\vec{J}=\Delta\vec{p}=-\vec{u}_i(M+m)$$

3 תנע וזרימת מסה

לעיתים אנחנו נתקלים במערכות מורכבות, אשר מסתם הכללית משתנה בזמן. דוגמאות הן מערכות בהן יש זרימה של מסה לתוך או מחוץ למערכת - למשל, עגלה נוסעת המתמלאת בחול, או רקטה הנעה ע"י שריפת דלק (ובכך מסתה יורדת).

במקרה כזה, יש לעשות שימוש בחוק שימור התנע (כמובן) בצורתו הדיפרנציאלית, כלומר $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$ תוך כדי שימת לב לכך שהן המסה והן המהירות משתנות כאשר חלקיקים יוצאים / נכנסים למערכת.

3.1 דוגמה: עגלה נוסעת המתמלאת בחול

על מנת להדגים את הנושא, נניח עגלה הנעה במהירות v_0 ימינה (בכיוון ציר x). העגלה מתמלאת בחול הנשפך אליה במהירות $\vec{u}$, ובקצב dm/dt. נסמן את מסת העגלה ב- $M=M(t)$ - כמובן משתנה בזמן עקב התמלאותה בחול (ראה איור 6).

נרצה לחשב את הכוח שעלינו להפעיל על מנת שהעגלה תמשיך לנוע במהירות קבועה (למרות התמלאותה בחול).
נרשום את מהירות זרימת החול בציר x כ- u_x.

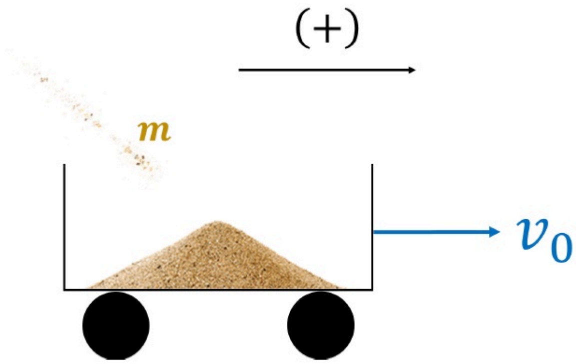
על מנת לפתור את הבעיה, נתבונן באינטרוול זמן קצר, בין זמן t לזמן $t+\Delta t$. באינטרוול הזמן Δt, כמות החול שנוספה לעגלה היא Δm. לכן, התנע (של העגלה + כמות החול שעתידה להתווסף למערכת) בזמן t הוא

$$\vec{p}(t)=M(t)\vec{v}+(\Delta m)\vec{u}$$

בזמן $t+\Delta t$ כמות החול Δm התווספה לעגלה. לכן התנע הסופי הוא

$$\vec{p}(t+\Delta t)=(M(t)+\Delta m)\,\vec{v}(t+\Delta t)=(M(t)+\Delta m)\,\vec{v}(t)$$

שכן הינחנו שמהירות העגלה קבועה (ואנחנו מפעילים עליה כוח לשם כך).



איור 6: עגלה נעה ימינה ומתמלאת בחול.

לכן סך כל שינוי התנע של המערכת הוא

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}(t+\Delta t) - \vec{p} = \Delta m(\vec{v} - \vec{u})$$

וקצב שינוי התנע נתון ע״י

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}(\vec{v} - \vec{u})$$

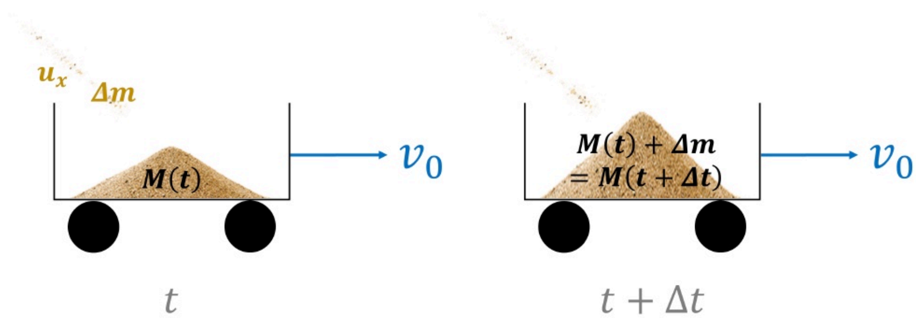
ובגבול

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}(\vec{v} - \vec{u})$$

וזהו כמובן הכוח שעלינו להפעיל,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}(\vec{v} - \vec{u})$$

למעשה, מהגדרת הבעיה, הרצפה מפעילה על העגלה כוח נורמלי, כך שאנחנו צריכים להפעיל רק כוח בכיוון ציר x.



איור 7: עגלה נעה ימינה ומתמלאת בחול.

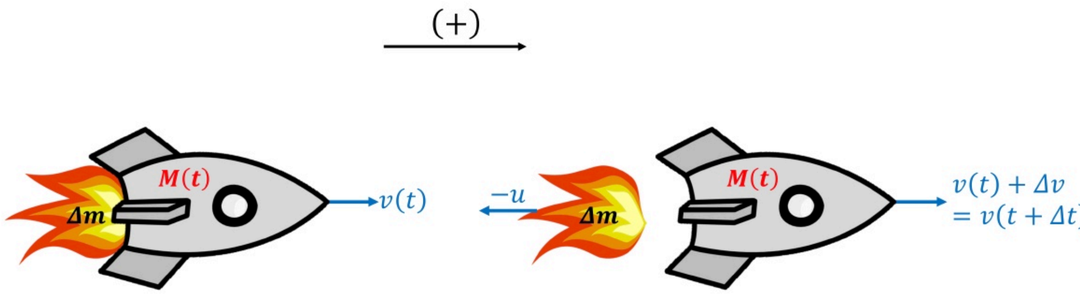
1. כאשר גרגירי החול נופלים לעגלה במהירות $u_x = v$ אין צורך להפעיל שום כוח ו- $F = 0$.
2. אינטואיטיבית, אם מהירות גרגירי החול גדולה ממהירות העגלה, מהירותה תגדל, ועלינו להפעיל כוח בכיוון השלילי (הנגדי) בכדי לאזן. ואכן, $u_x > v \leftrightarrow F < 0$.
3. בהתאמה, אם מהירות גרגירי החול קטנה ממהירות העגלה, עלינו להפעיל כוח חיובי בכדי לאזן, ואכן $u_x < v \leftrightarrow F > 0$.
4. אם $u_x = 0$ (כלומר לגרגרי החול אין מהירות משיקית), נקבל תמיד ש- $F > 0$. פיסיקלית, מסת העגלה גדלה, התנע נשמר (חוק שימור התנע) ולכן מהירותה חייבת לקטון. לכן, על מנת שהעגלה תמשיך לנוע במהירות קבועה, עלינו להפעיל עליה כוח חיובי.

4 תנועת רקטה

תנועת רקטה היא בעיה קלאסית של שימוש בחוק שימור התנע בצורתו הדיפרנציאלית.

הרקטה נושאת בתוכה את הדלק שלה, וכך בכל רגע נתון היא שורפת את הדלק - שהופך בתהליך השריפה לגז המתפשט מאחוריה, ובכך היא מתקדמת קדימה ובו זמנית מסתה קטנה. רקטות - או טילים הם למעשה הכלי היעיל ביותר שאפשר לאנושות להגיע לירח ואף למקומות רחוקים יותר.

ננתח את תנועת הרקטה מנקודת מבט פיסיקלית (ראה איור 8). בכל אינטרוול זמן Δt המנוע שורף דלק במסה Δm. הדלק נדלף אחורה במהירות $-\vec{u}$ (במערכת הרקטה). בכך הוא מאיץ את הרקטה, שמסתה $M(t)$ קדימה.



איור 8: תנועת רקטה

לשם הדיון, נניח תחילה שהרקטה נעה בחלל, כך שלא פועל עליה כל כוח חיצוני. בזמן t מסת הרקטה והדלק הוא $M + \Delta m$, ולכן התנע של הרקטה הוא

$$\vec{p}(t) = (M + \Delta m)\,\vec{v}(t)$$

לאחר זמן Δt מהירות הרקטה היא $\vec{v}(t) + \Delta\vec{v}(t)$ ולכן מהירות הגז (במערכת המעבדה) היא

$$\vec{v}(t) + \Delta\vec{v}(t) - \vec{u}$$

מכאן שסך כל התנע (של הרקטה והגז) בזמן $t + \Delta t$ הוא

$$\vec{p}(t + \Delta t) = M(\vec{v}(t) + \Delta\vec{v}(t)) + \Delta m\,(\vec{v}(t) + \Delta v(t) - \vec{u})$$

הפרש התנע הוא כמובן

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t) = M\Delta\vec{v}(t) + \Delta m \Delta v(t) - \Delta m \vec{u} \tag{5}$$

ובגבול $\Delta t \to 0$ נרשום את קצב שינוי התנע של המערכת:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = M\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\vec{u} \tag{6}$$

כאשר האיבר השני מצד ימין במשוואה 5, כולל מכפלה של שני איברים קטנים: $\Delta m \Delta v$ ולכן בגבול $\Delta t \to 0$ איבר זה מתאפס, שכן הוא איבר תיקון מסדר שני.

(מתימטית, ניתן לראות את זה כך: קצב השינוי נתון ע״י חלוקה ב- Δt. נרשום $(\Delta m \Delta v/\Delta t = \frac{\Delta m}{\Delta t}\frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta t \to \frac{dm}{dt}\frac{dv}{dt}\Delta t \to_{\Delta t \to 0} 0$

כעת, נשים לב שמסת הדלק הנשרף היא בדיוק המסה הנגרעת מהרקטה, כלומר $dm/dt = -dM/dt$. לכן, בהעדר כוחות, $d\vec{p}/dt = 0$ ומשוואת התנועה של רקטה בחלל נרשמת כ-

$$\boxed{0 = M\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dM}{dt}\vec{u}} \tag{7}$$

נוכל לפתור את משוואה זו, ע"י חלוקה במסה:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{u}}{M}\frac{dM}{dt}$$

הערה: בזמן המעוף מסת הרקטה קטנה, כלומר $dM/dt < 0$. הגדרנו את מהירות הגז $\vec{u}$ כחיובית בכיוון התקדמות הרקטה, ולכן נקבל שככל שהמסה קטנה, הרקטה מאיצה- בהתאם לאינטואיציה שלנו ($d\vec{v}/dt > 0$).

עבור מהירות פליטת גז קבועה (שזה בדרך כלל המקרה), נוכל לפתור את המשוואה ע"י אינטגרציה:

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d\vec{v}}{dt}dt = -\vec{u}\int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{M}\frac{dM}{dt}dt = -\vec{u}\int_{t_0}^{t_f} \frac{d\ln(M)}{dt}dt \tag{8}$$

$$\vec{v}_f - \vec{v}_0 = -\vec{u}\ln\left(\frac{M_f}{M_0}\right) \tag{9}$$

$$\vec{v}_f = \vec{v}_0 + \vec{u}\ln\left(\frac{M_0}{M_f}\right) \tag{10}$$

כאשר v_0, v_f, M_0, M_f הם המהירות ההתחלתית והסופית והמסה ההתחלתית והסופית של הרקטה.

נשים לב, שבמקרה זה - ללא כוחות חיצוניים, המהירות הסופית אינה תלויה בזמן בו לוקח לשרוף את הגז, אלא רק במהירותו וביחס המסות.

לעומת זאת, נסתכל במקרה הריאליסטי שעל הרקטה פועל כוח- למשל, כוח הכובד. משוואה 7 תהפך ל-

$$\vec{F} = M\vec{g} = M\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dM}{dt}\vec{u} \tag{11}$$

ופתרונה

$$\vec{v}_f = \vec{v}_0 + \vec{u}\ln\left(\frac{M_0}{M_f}\right) + \vec{g}(t_f - t_0) \tag{12}$$

ואם נניח $\vec{v}_0 = 0$ וכן טיל שממריא למעלה (בניגוד לכיוון כוח הכובד) נקבל

$$v_f = u\ln\left(\frac{M_0}{M_f}\right) - gt_f \tag{13}$$

כלומר, כאן יש יתרון מובנה למהירות שריפת דלק גבוהה יותר - ככל שהדלק נשרף מהר יותר, כך המהירות הסופית גדולה יותר. לכן בשיגור טילים לחלל נשרפת כמות גדולה מאוד של דלק בזמן קצר ככל הניתן.

לדוגמה, טילי סטורן 5 - הטילים ששימשו בהצלחה לשיגור אדם לירח שקלו בהמראה כ- 3000 טון. 70% ממשקל זה היו דלק, שנשרף כולו תוך כ-170 שניות (פחות מ-3 דקות).

רשימת מקורות

[1] Kleppner, D. & Kolenkow, R., *"An Introduction to Mechanics"* (Cambridge), second edition.
[2] Kittel, C., *"Mechanics"* (Berkeley Physics Course Vol. 1, McGraw-Hill);

תרגום לעברית על ידי האוניברסיטה הפתוחה