מכניקה - הרצאה 8: אנרגיה ודינמיקה

אסף פאר

16 ביוני 2020

הערה חשובה: סיכומי ההרצאות מבוססים על הרצאותיהם של **ד"ר יוסי בן ציון** כפי שנכתבו על ידי **לאה יעבץ**, ושל **פרופסור דייויד קסלר** כמו כן, ההרצאות מבוססות על מקורות [1] ו-[2].

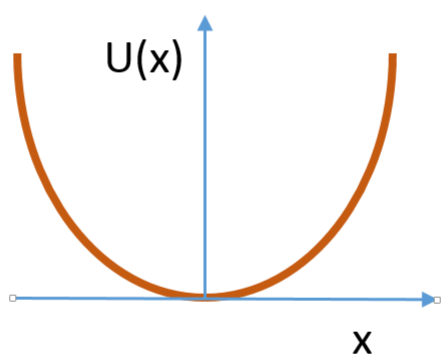
1 מבוא

חוקי שימור התנע והאנרגיה נותנים בידינו כלים חזקים לניתוח והבנה של מערכות פיסיקליות רבות. כאן נביא נספר דוגמאות שימושיות לשימוש בחוקים אלה.

2 דיאגרמת אנרגיה

לעיתים קרובות ניתן לנתח תנועה (חד מימדית) על ידי שימוש ב**דיאגרמת אנרגיה**. בדיאגרמה זו, האנרגיה הפוטנציאלית והאנרגיה הכללית מתוארות כפונקציה של המיקום במרחב. דיאגרמה זו שימושית במיוחד כאשר דנים בכוחות משמרים, שכן כפי שהראינו, במקרה החד מימדי מתקיים $F = -dU/dx$ כש- U היא האנרגיה הפוטנציאלית, או בקיצור הפוטנציאל. מכאן, שאם הפוטנציאל ידוע, ניתן בכל מקום לחשב את הכוח.

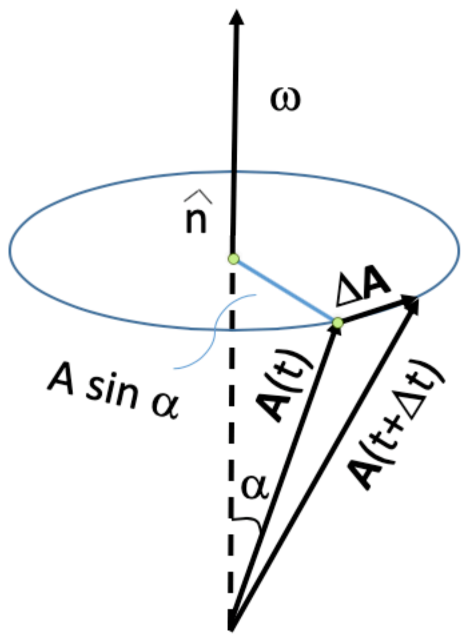
כפי שהראינו, במקרים חשובים רבים הפוטנציאל מתואר ע"י **פרבולה**: לדוגמה, הפוטנציאל של קפיץ נתון ע"י $U = \frac{1}{2}kx^2$ (ראה איור 1) .



איור 1: דיאגרמת פוטנציאל

מאחר שהאנרגיה הכללית קבועה במערכת משמרת (מערכת בה ישנם רק כוחות משמרים) - היא אינה תלויה במיקום, היא תתואר על ידי קו מאוזן בדיאגרמת האנרגיה (ראה איור 2) . מכאן גם, שהאנרגיה הקינטית $E_k = E - U$ בכל נקודה ניתנת למציאה על ידי בחינת הדיאגרמה. כמו כן, מאחר שהאנרגיה הקינטית אינה יכולה להיות שלילית, נקבל מיד שתנועת הגוף מוגבלת לאזור בו $U(r) \leq E$, שהוא האזור בו $a \leq x \leq b$ באיור 2.

מעיון בדיאגרמה ניתן גם להבין את תנועת הגוף: האנרגיה הקינטית מקסימלית ב- $x = 0$ ומתאפסת בנקודות המעבר $x = a, b$. בנקודות המעבר, אם כך, הגוף נמצא במנוחה רגעית. תנועת הגוף היא אם כך **חסומה**.



איור 2: דיאגרמת אנרגיה עבור אוסצילטור הרמוני

מצב שונה הוא מצב בו הגוף נמצא בפוטנציאל מרכזי, כמו פוטנציאל כבידה של כדור הארץ (ראה איור 3) . פוטנציאל הכבידה נתון על ידי $U(r) = A/r$ כאשר A הוא שלילי (שכן הכוח הוא שלילי).

כפי שהגדרנו, הפוטנציאל $U(r)_{r\to\infty} \to 0$. לכן, אם האנרגיה הקינטית גדולה מספיק (כלומר, המהירות ההתחלתית היא גבוהה ממהירות הבריחה) כך שסך כל האנרגיה חיובית, הגוף יוכל להימלט לאינסוף. לעומת זאת, אם המהירות ההתחלתית קטנה ממהירות הבריחה, סך כל האנרגיה של הגוף היא שלילית, והגוף יגיע לרדיוס r סופי, יסתובב ו"ייפול" בחזרה. מכאן הביטוי "בור פוטנציאל".

בכיוון ההפוך, נשים לב שהכוח הנורמלי שמפעילים פני כדור הארץ מונעים מגוף לנוע לרדיוס קטן מ- r_E.

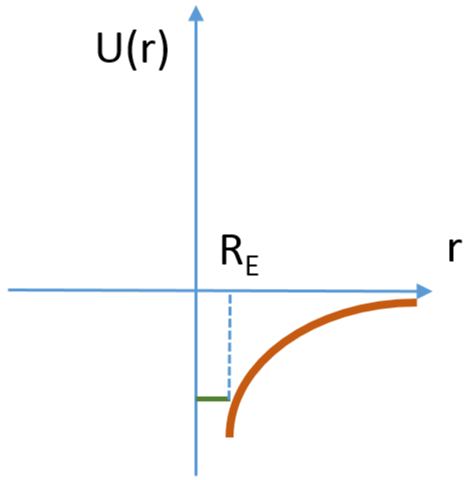
המצב שונה עבור פוטנציאל מרכזי דוחה, $U(r) = A/r$ עם A חיובי. פוטנציאל כזה מאפיין, למשל, את הכוח החשמלי הפועל בין שני מטענים זהים (ראה איור 4) .

נניח גוף הנע בתוך פוטנציאל כזה, ומתקרב מאינסוף. האנרגיה הקינטית תמיד חיובית וסופית, ולכן גוף כזה יוכל להתקרב למרכז, אך רק עד לרדיוס סופי מסויים, $r_{\min}$. ככל שהגוף מתקרב למרכז, כך האנרגיה הקינטית שלו יורדת, עד שהוא מגיע לעצירה (רגעית) ב- $r_{\min}$, משנה את כיוון מהירותו וחוזר לאינסוף. תנועה זו מתארת פיזור. נשים לב, כי תנועת הגוף אינה חסומה מלמעלה, שכן הפוטנציאל יורד ל-0 ב $r \to \infty$, וכן שהמהירות ההתחלתית והסופית של הגוף זהות.

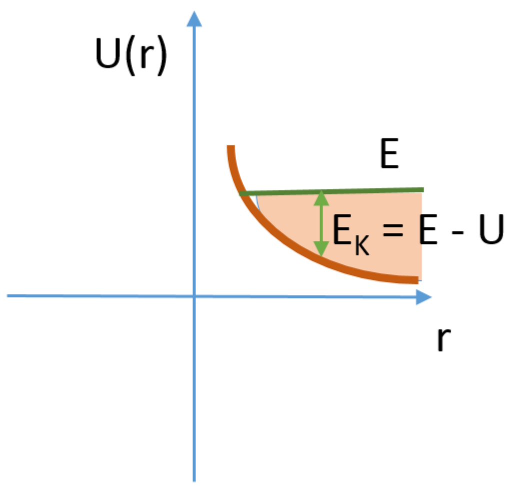
בטבע מופיעים לעיתים קרובות פוטנציאלים המאפשרים הן תנועה חסומה והן תנועה לא חסומה. דוגמה לפוטנציאל כזה מופיע באיור 5 המתאר אינטרקציות בין זוג אטומים. במרחקים גדולים (יחסית) האטומים מושכים אחד את השני על ידי כוחות ואן-דר-ואלס, $F(r) \propto r^{-7}$. לעומת זאת, במרחקים קצרים מאוד, גרעיני האטומים דוחים בחוזקה האחד את השני, וגורמים לפוטנציאל לגדול במהירות עם התקצרות המרחק.

תנועת האטומים בפוטנציאל כזה תלויה באנרגיה הכללית שלהם. אם האנרגיה הקינטית גדולה מספיק כך שסך כל האנרגיה חיובי, האטומים אינם קשורים וחפשיים לנוע הרחק אחד מהשני. מאחר שהפוטנציאל עולה בחדות, נקבל ש- $r_{\min}$ כמעט ואינו תלוי באנרגיה. סה"כ, התנועה דומה לתנועה במקרה הקודם, ומתארת פיזור.

המצב שונה עבור $E < 0$. במקרה זה, תנועת האטומים חסומה הן מלמטה והן מלמעלה, ומתקיים $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$. כלומר, שני האטומים קשורים זה לזה- במצב זה הדיאגרמה מתארת בעצם את דיאגרמת האנרגיה



איור 3: דיאגרמת אנרגיה עבור פוטנציאל כבידה



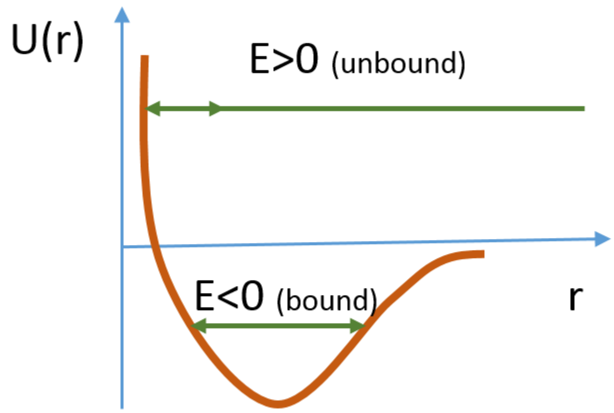
איור 4: דיאגרמת אנרגיה עבור פוטנציאל מרכזי דוחה

של מולקולה דו-אטומית.

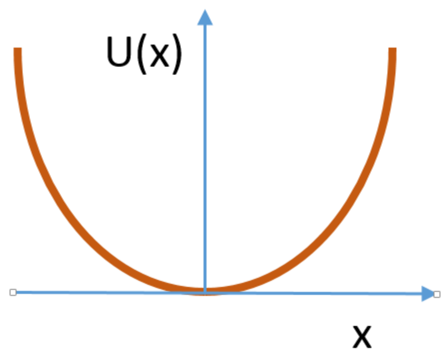
3 דיאגרמת אנרגיה ושיווי משקל

מעבר להיותה כלי חשוב בניתוח תנועה בשדה פוטנציאל, לדיאגרמת האנרגיה תפקיד חשוב בניתוח **יציבות** המערכת.
כפי שהראינו, במקרים חשובים רבים הפוטנציאל מתואר ע"י **פרבולה**: לדוגמה, הפוטנציאל של קפיץ נתון ע"י $U = \frac{1}{2}kx^2$ (ראה איור 6) .

עבור גוף שנמצא בנקודה $x > 0$ מתקיים $dU/dx > 0$ ולכן הכוח הוא **שלילי**. באופן דומה, עבור $x < 0$, $dU/dx < 0$ ולכן הכוח הפועל על הגוף חיובי. רק בנקודת המינימום ($x = 0$ באיור) מתקיים $dU/dx = 0$ ולכן הכוח הפועל על הגוף מתאפס.



איור 5: דיאגרמת אנרגיה עבור אינטרקציות אטומיות



איור 6: דיאגרמת פוטנציאל של קפיץ

מכאן, שמינימום האנרגיה הפוטנציאלית הוא המקום שבו המערכת תימצא **בשיווי משקל**:

$$\frac{dU}{dx} = 0 \tag{1}$$

במערכת המתאורת באיור (במערכת הרמונית), שיווי המשקל הוא **יציב**: כל תזוזה של המערכת ממצב שיווי המשקל תגרור כוח שיחזיר אותה בחזרה לנקודת שיווי המשקל. באיור 6, הדבר בא לידי ביטוי בכך שנקודת שיווי המשקל נמצאת במינימום (ולא במקסימום) של האנרגיה הפוטנציאלית. כלומר, תנאי לשיווי משקל יציב הוא

$$\frac{d^2U}{dx^2} > 0 \tag{2}$$

3.1 שיווי משקל לא יציב

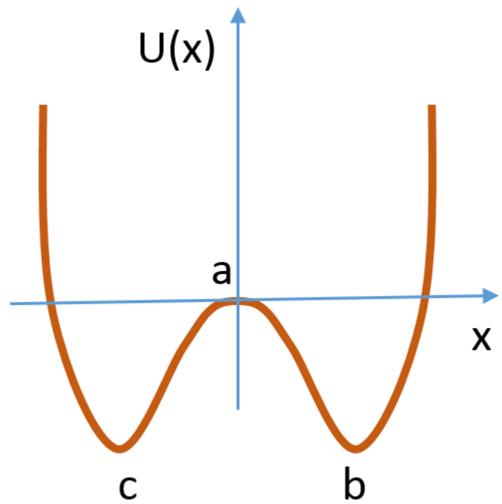
נתבונן בפוטנציאל מהצורה

$$U(x) = \alpha x^4 - \beta x^2$$

כש- $\alpha, \beta > 0$ (ראה איור 7).

את נקודות שיווי המשקל נמצא ע"י גזירה של הפוטנציאל והשוואה ל-0:

$$\frac{dU(x)}{dx} = 4\alpha x^3 - 2\beta x = 0 \quad \rightarrow 2x(2\alpha x^2 - \beta) = 0$$



איור 7: דיאגרמת פוטנציאל

ומכאן שנקודות שיווי המשקל הן

$$x = 0\ , \quad x = \pm\sqrt{\frac{\beta}{2\alpha}}$$

על מנת למצוא איזו מנקודות שיווי המשקל הן יציבות, נגזור בפעם השניה:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 12\alpha x^2 - 2\beta$$

בנקודת שיווי המשקל $x = 0$ נקבל

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0} = -2\beta < 0$$

ולכן זוהי נקודת שיווי משקל לא יציבה: כל תזוזה קלה במיקום תגרור כוח שירחיק את הגוף מנקודת שיווי המשקל.
בנקודות $x = \pm\sqrt{\frac{\beta}{2\alpha}}$ נקבל

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=\pm\sqrt{\frac{\beta}{2\alpha}}} = 12\alpha\frac{\beta}{2\alpha} - 2\beta = 4\beta > 0$$

ולכן אלו נקודות שיווי משקל יציבות.

4 שימוש בחוק שימור האנרגיה לפתרון בעיות

כפי שהראינו בשיעור הקודם, שימוש בחוק שימור האנרגיה מאפשר לנו פיתרון מהיר ואלגנטי לבעיות מורכבות. נביא כאן דוגמאות נוספות.

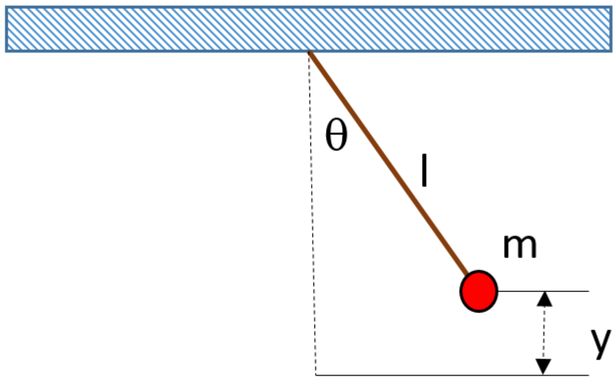
4.1 מטוטלת

נתבונן שוב בבעית המטוטלת (ראה איור 8) .

את הבעיה פתרנו כבר בעבר. כעת נפתור אותה שוב באמצעות חוק שימור האנרגיה. מטרתינו למצוא את המהירות $v = v(\theta)$ ואת המתיחות בחוט. נשתמש בסימונים הרגילים- l הוא אורך החוט, m היא המסה ו-y הגובה מעל נקודת המינימום.

נגדיר את הפוטנציאל ב- $y = 0$ כ- $U = 0$. מאחר ש - $v = l\dot{\theta}$ נקבל

$$E = E_k + U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgy$$



איור 8: מטוטלת

כמו כן, $y = l(1 - \cos\theta)$.

נסמן את הזווית המקסימלית (קצה התנודה) אליה מגיעה המטוטלת ב- θ_0. במקודה זו, המהירות מתאפסת, $v(\theta_0) = \dot{\theta}(\theta = \theta_0) = 0$. מחוק שימור האנרגיה נקבל

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta) = mgl(1 - \cos\theta_0)$$

ומכאן

$$v(\theta) = l\dot{\theta} = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

נשים לב שבשיטה זו לא נזקקנו לפתרון מלא (וארוך...) של משוואות התנועה.

כמו כן, נוכל לחשב את המתיחות בחבל, על ידי חוק התנועה של ניוטון, $\sum F_r = ma_r = -mv(\theta)^2/l$,

$$mg\cos\theta - T = -\frac{mv(\theta)^2}{l}$$

$$T(\theta) = 3mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_0$$

4.2 גוף מחליק על מישור משופע

נתבונן שוב בבעית גוף המחליק על מישור משופע. נניח שהגוף מחליק (ללא חיכוך) ממנוחה, מגובה h על מישור משופע בזווית α. מחוק שימור האנרגיה, נקבל מיד את מהירותו בקצה המישור:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

נוכל להשוות חישוב מיידי זה לחישוב הארוך לפי חוקי ניוטון. התאוצה במקביל למישור המשופע היא $a_x = g\sin\alpha$. המהירות בתחתית המישור היא אם כך $v_f = a_x t_f$, כש- t_f הוא הזמן הלוקח לגוף לרדת.

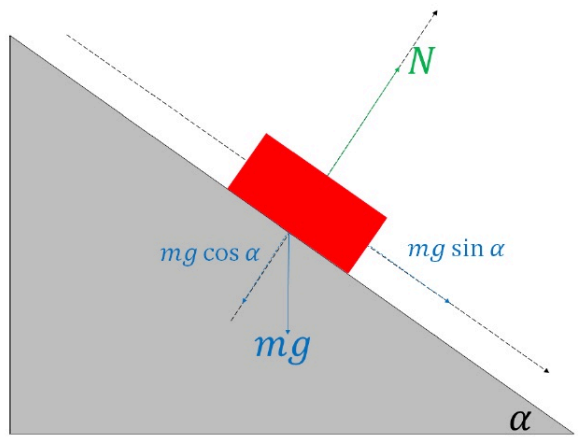
המרחק שעובר הגוף הוא

$$x = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}a_x t_f^2 = \frac{1}{2}a_x\left(\frac{v_f}{a_x}\right)^2 = \frac{v_f^2}{2a_x}$$

ולכן

$$v_f^2 = \frac{2a_x h}{\sin\alpha} = 2gh$$

כמובן שהתוצאות זהות, פשוט עבדנו הרבה יותר קשה (ועם סיכוי הרבה יותר גבוה לטעויות). כמו כן, נשים לב שהכוח הנורמלי כאן אינו רלוונטי, שכן הוא אינו מבצע עבודה (הוא אנך לכיוון התנועה).



איור 9: גוף מחליק על מישור משופע

5 התנגשויות

חקר של תוצאות התנגשויות בין חלקיקים ממלא תפקיד מרכזי מאוד בפיסיקה המודרנית מאז ראשית המאה ה-20. למעשה, (כמעט) כל הידע שנצבר על פיסיקת החלקיקים מקורו בחקר תוצרי התנגשויות - המתקיימות לאחר שמאיצי חלקיקים כמו זה שב CERN מאיצים חלקיקים לאנרגיות גבוהות, גורמים להם להתנגש זה בזה וחוקרים את התוצרים.

ניתן לחלק את מהלך ההתנגשות לשלושה שלבים.

בשלב הראשון, החלקיקים המתנגשים רחוקים זה מזה, ואין ביניהם אינטרקציה. כל אחד מהם הוא חופשי.

בשלב השני, שלב ההתנגשות, החלקיקים מבצעים אינטרקציה ביניהם, כלומר מפעילים כוח האחד על השני. כתוצאה מהכוח הפועל, האנרגיה והתנע של כל חלקיק משתנה.

בשלב השלישי והאחרון, הרבה לאחר ההתנגשות, כל חלקיק שוב נע באופן חופשי בקו ישר (עם מהירות חדשה ובכיוון חדש). בדרך כלל בניסויים זה השלב בו נמדדים המהירויות הסופיות של החלקיקים, על מנת ללמוד על אופי ההתנגשות.

בהעדר כוחות חיצוניים, התנע הכללי חייב להישמר:

$$\sum \vec{p}_i = \sum \vec{p}_f \qquad (3)$$

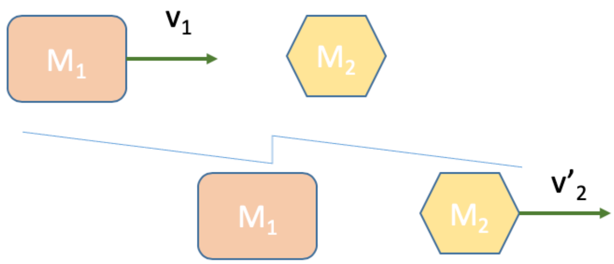
כלומר, בהתנגשות בין שני חלקיקים מתקיים

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \qquad (4)$$

כאשר $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ הם מהירויות החלקיקים לפני ההתנגשות, ו- $\vec{v}_1', \vec{v}_2'$ הם מהירויות החלקיקים אחרי ההתנגשות.

5.1 התנגשות במימד יחיד

בניגוד לתנע, שנשמר תמיד (בהעדר כוחות חיצוניים), האנרגיה הקינטית לא בהכרח נשמרת בהתנגשות. נתבונן תחילה בהתנגשות חד מימדית, בין שני גופים בעלי מסות שוות. נניח שלפני ההתנגשות הגוף הראשון נע במהירות $v_1 = v$, ואילו השני היה במנוחה. כמו כן, נניח שלאחר ההתנגשות, גוף 1 במנוחה, וגוף 2 נע במהירות $v_2' = v$. ברור שהן התנע והן האנרגיה נשמרים. התנגשות המשמרת את האנרגיה הקינטית נקראת **התנגשות אלסטית**.



איור 10: התנגשות אלסטית בין גופים בעלי מסות שוות. הגוף השני נמצא במנוחה לפני ההתנגשות, והגוף הראשון במנוחה אחרי ההתנגשות.

נתבונן במקרה שני בו תנאי ההתחלה זהים למקרה הראשון, אך לאחר ההתנגשות, שני הגופים נעים יחדיו (נדבקים אחד לשני). משימור התנע נקבל את מהירותם לאחר ההתנגשות:

$$Mv = 2Mv' \quad \rightarrow v' = v/2 \tag{5}$$

האנרגיה הקינטית ההתחלתית היא $(1/2)Mv^2$, ואילו האנרגיה הקינטית הסופי היא $(1/2)(2M)v'^2 = (1/4)Mv^2$ כלומר, האנרגיה הקינטית לא נשמרה. התנגשות בה האנרגיה הקינטית לא נשמרת נקראת **התנגשות פלסטית**. ברור שהאנרגיה הכוללת נשמרה - הפרש האנרגיה הקינטית הפך (ברובו) לחום, לצליל, וכו'.

על מנת להביא בחשבון את אובדן האנרגיה הקינטית בהתנגשות, נרשום את משוואת שימור האנרגיה בהתנגשות כ-

$$E_k(i) = E_k(f) + Q \tag{6}$$

כאשר Q היא כמות האנרגיה הקינטית שהפכה לאנרגיה אחרת (בד"כ חום).

בהתנגשות אלסטית, מתקיים $Q = 0$.

בחיי היום יום, בדרך כלל אנרגיה קינטית אובדת בהתנגשות (היא פלסטית) ולכן $Q > 0$.

לעיתים (לא ממש בחיי היום יום) מתקיים $Q < 0$, ואז ההתנגשות נקראת סופר-אלסטית. מצב כזה קורה אם ההתנגשות משחררת אנרגיה שאצורה באחד הגופים, וממירה אותה באנרגיה קינטית. (מצב זה מתרחש לעיתים באינטרקציות גרעיניות).

במקרה החד מימדי, חוקי שימור התנע והאנרגיה (כולל הפרמטר Q) מספיקים על מנת לקבוע את המהירויות הסופיות. במקרה זה, נרשום:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \tag{7}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_1'}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2'}^2 + Q \tag{8}$$

בהינתן תנאי ההתחלה - m_1, m_2, v_1, v_2 ו- Q ניתן לפתור את המשוואות ולקבל את v_1', v_2'.

5.1.1 דוגמה: התנגשות אלסטית במימד אחד

במקרה זה, משוואות התנע והאנרגיה הופכות ל-

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1{v_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2'}^2$$

נעביר אגפים, ונקבל:

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2)$$

$$m_1(v_1^2 - {v_1'}^2) = m_2({v_2'}^2 - v_2^2)$$

נחלק את המשוואות:

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$$

נציב במשוואת התנע, ונקבל

$$v_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_2$$

$$v_2' = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_2$$

נסתכל ספציפית על מקרה בו $m_2 = 3m_1$ ו$v_2 = -v_1$ (גופים בעלי מסות שונות מתנגשים במהירויות שוות). על ידי הצבה במשוואה, נקבל $v_2' = 0$, $v_1' = -2v_1$. כלומר, הגוף הגדול יותר נעצר, והקטן יותר ניתז בכיוון הפוך לכיוונו ההתחלתי, במהירות כפולה.

כמו כן, נשים לב כי במקרה בו $v_2 = 0$ מתקיים:

עבור $m_1 \gg m_2$, $v_1' \approx v_1,\ v_2' \approx 2v_1$,

עבור $m_1 \ll m_2$, $v_1' \approx -v_1,\ v_2' \approx 0$,

עבור $m_1 = m_2$, $v_1' = 0, v_2' = v_1$.

5.2 התנגשויות ביותר ממימד אחד: מערכת מרכז המסה

בבעיות הכוללות התנגשות, כמעט תמיד נוח יותר לעבוד במערכת מרכז המסה.

בהתנגשות בין שני גופים m_1, m_2 עם מהירויות התחלתיות $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ מהירות מערכת מרכז המסה היא

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{9}$$

מהירויות הגופים במערכת מרכז המסה הם

$$\vec{v}_{1,c} = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) \tag{10}$$

$$\vec{v}_{2,c} = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right) \tag{11}$$

והתנע במערכת מרכז המסה הוא

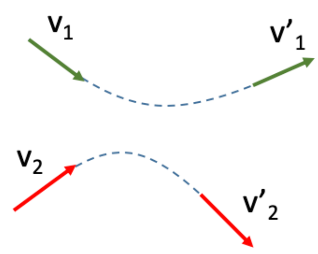
$$\vec{p}_{1,c} = m_1\vec{v}_{1,c} = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) \equiv \mu\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) \tag{12}$$

$$\vec{p}_{2,c} = m_2\vec{v}_{2,c} = -\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) \equiv -\mu\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) \tag{13}$$

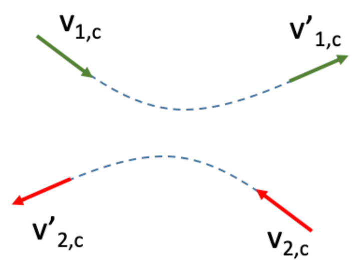
כאשר הגדרנו את **המסה המצומצמת** (reduced mass) של המערכת כ-

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \leftrightarrow \frac{1}{\mu}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2} \tag{14}$$

כמובן, שהתנע הכללי במערכת מרכז המסה מתאפס. כיוון שהתנע הכללי נשמר בהתנגשות, מהירות מערכת מרכז המסה נשמרת. התאפסות התנע היא שהופכת את התיאור במערכת מרכז המסה לנוח כל כך: מהירויות החלקיקים, הן לפני והן אחרי ההתנגשות הפוכות אחת לשניה (ראה איורים) כתוצאה מכך, במערכת מרכז המסה מסלולי החלקיקים הם סימטרים. שני החלקיקים המתנגשים מפוזרים בזוויות זהות.



איור 11: תאור התנגשות במערכת המעבדה



איור 12: תאור התנגשות במערכת מרכז המסה. מהירויות החלקיקים הפוכות.

5.2.1 התנגשות אלסטית במערכת מרכז המסה

במקרה של התנגשות אלסטית, נשתמש בחוק שימור התנע לפני ואחרי ההתנגשות על מנת לרשום: -

$$\begin{aligned} m_1 v_{1,c} - m_2 v_{2,c} &= 0 \\ m_1 v'_{1,c} - m_2 v'_{2,c} &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

חוק שימור האנרגיה במערכת זו נותן

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1,c}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,c}^2 = \frac{1}{2}m_1 {v'_{1,c}}^2 + \frac{1}{2}m_2 {v'_{2,c}}^2 \tag{16}$$

נבטא את $v_{2,c}, v'_{2,c}$ ממשוואות התנע, ונקבל

$$\frac{1}{2}\left(m_1+\frac{m_1^2}{m_2}\right)v_{1,c}^2 = \frac{1}{2}\left(m_1+\frac{m_1^2}{m_2}\right){v'_{1,c}}^2 \tag{17}$$

כלומר

$$v_{1,c} = v'_{1,c} \tag{18}$$

ובאופן דומה

$$v_{2,c} = v'_{2,c} \tag{19}$$

כלומר: הראינו שבהתנגשות אלסטית גודל ווקטור המהירות של כל חלקיק במערכת מרכז המסה נשאר קבוע. רק כיוון המהירות משתנה.

5.2.2 התנגשות פלסטית המערכת מרכז המסה

נתבונן במקרה של התנגשות פלסטית. במקרה זה, האנרגיה לא נשמרת. מאחר שהתנע נשמר, במערכת מרכז המסה הגופים לאחר ההתנגשות נשארים במנוחה - "דבוקים" אחד לשני. במערכת המעבדה, הגופים נעים במהירות השווה למהירות מערכת מרכז המסה (ראה משוואה 9),

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

אובדן האנרגיה הקינטית (במערכת המעבדה) מחושב ע"י:

$$\begin{aligned}
\Delta E_k = E_{k,i} - E_{k,f} &= \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 - \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)v_{CM}^2 \\
&= \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 - \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\tfrac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}\right)^2 \\
&= \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{m_1^2v_1^2+2m_1m_2\vec{v}_1\vec{v}_2+m_2^2v_2^2}{m_1+m_2}\right) \\
&= \tfrac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)^2 = \tfrac{\mu}{2}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)^2
\end{aligned} \tag{20}$$

נחזור על החישוב במערכת מרכז המסה:

$$\begin{aligned}
\Delta E_k(CM) &= \tfrac{1}{2}m_1v_{1,c}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2,c}^2 - 0 \\
&= \tfrac{1}{2}\tfrac{m_1m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\left(\vec{v}_1-\vec{v}_2\right)^2 + \tfrac{1}{2}\tfrac{m_2m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\left(\vec{v}_2-\vec{v}_1\right)^2 \\
&= \tfrac{1}{2}\mu\left(\vec{v}_1-\vec{v}_2\right)^2\left(\tfrac{m_2}{m_1+m_2}+\tfrac{m_1}{m_1+m_2}\right) = \tfrac{1}{2}\mu\left(\vec{v}_1-\vec{v}_2\right)^2
\end{aligned} \tag{21}$$

כלומר, קיבלנו שהפרש האנרגיה כפי שמחושב במערכת מרכז המסה זהה לזה המחושב במערכת המעבדה. פשוט עבדנו פחות.

רשימת מקורות

[1] Kleppner, D. & Kolenkow, R., *"An Introduction to Mechanics"* (Cambridge), second edition.
[2] Kittel, C., *"Mechanics"* (Berkeley Physics Course Vol. 1, McGraw-Hill);

תרגום לעברית על ידי האוניברסיטה הפתוחה