# מכניקה - הרצאה 9: תנע זוויתי

אסף פאר

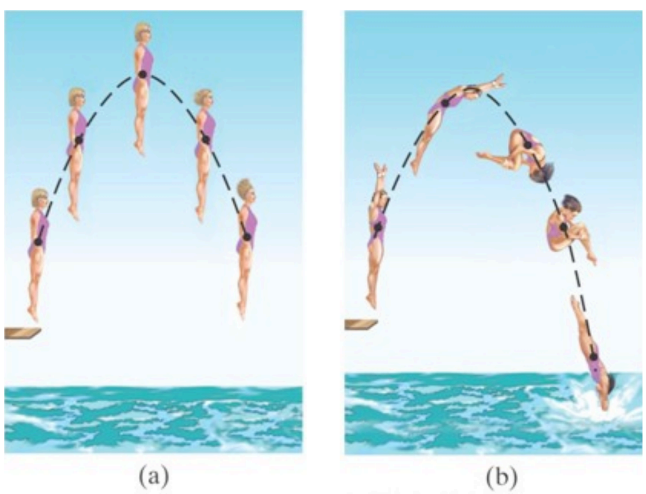
16 ביוני 2020

הערה חשובה: סיכומי ההרצאות מבוססים על הרצאותיהם של **ד"ר יוסי בן ציון** כפי שנכתבו על ידי **לאה יעבץ**, ושל **פרופסור דייויד קסלר** כמו כן, ההרצאות מבוססות על מקורות [1] ו-[2].

## 1 מבוא

עד עתה, עסקנו או בתנועת גוף נקודתי, או בתנועה קווית. ואולם, התעלמנו מתנועה סיבובית. תנועה כזאת מתקיימת בגופים קשיחים, היכולים לנוע סביב מרכז המסה שלהם. למעשה, כפי שטענתי בעבר, כל תנועה של גוף קשיח ניתן לחלק לתנועת מרכז המסה, ולתנועת סיבוב סביב מרכז המסה (ראה איור 1).

כאן ננתח תנועה סיבובית. כפי שנראה מיד, למושגים של: כוח, תנע קווי ומרכז מסה שפיתחנו בדיון על תנועה קווית, ישנם אנלוגים בתנועה סיבובית: מומנט, תנע זוויתי ומומנט אינרציה. את כולם נגדיר בהמשך.


(a) (b)

איור 1: את תנועתה של קופצת למים ניתן לחלק לתנועת מרכז המסה (שמאל) המחוברת עם תנועת סיבוב סביב מרכז המסה (ימין)

## 2 תנע זוויתי של חלקיק יחיד

נתחיל מהמקרה הפשוט ביותר, זה של חלקיק נקודתי. **התנע הזוויתי** של חלקיק בעל תנע $\vec{p}$ הנמצא במיקום $\vec{r}$ ביחס לראשית הצירים מוגדר כ-

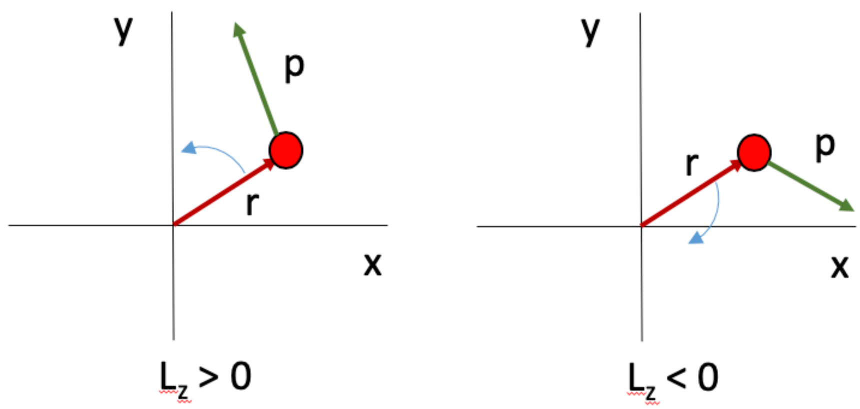
$$\boxed{\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}} \qquad (1)$$

יחידות התנע הזוויתי (במערכת SI ) הן $kg \cdot m^2/s$.
נשים לב למספר נקודות מהותיות.

1. התנע הזוויתי $\vec{L}$ תלוי במיקומו של החלקיק, $\vec{r}$. כלומר, שינוי בהגדרת ראשית הצירים מוביל מיד לשינוי בתנע הזוויתי - זאת בניגוד לתנע הקווי, שאינו תלוי בהגדרת הצירים. לכן, אין משמעות לדבר על תנע זוויתי של חלקיק ללא התייחסות לצירים.

2. התנע הזוויתי מוגדר באמצעות מכפלה ווקטורית, אותה למדנו בשיעורים הראשונים. כמובן, התנע הזוויתי הוא ווקטור בעצמו. בהתאם לכללי המכפלה הווקטורית, כיוון התנע הזוויתי אנך למישור המוגדר על ידי ווקטורי המיקום $\vec{r}$ והתנע $\vec{p}$, בהתאם לכלל היד הימנית. במידה והחלקיק נע בכיוון $\vec{r}$ $(\vec{p} \parallel \vec{r})$ , נקבל שהתנע הזוויתי מתאפס.

3. אם הווקטורים $\vec{r}, \vec{p}$ מגדירים את מישור $x-y$, הרי שכיוון התנע הזוויתי הוא בכיוון ציר $z$. התנע הזוויתי יהיה חיובי אם "כיוון הסיבוב" (ראה איור 2) הוא נגד כיוון השעון, ושלילי אם הוא עם כיוון השעון.




איור 2: אם ווקטור המהירות "מנסה לסובב" את החלקיק ביחס לראשית הצירים בכיוון הפוך לכיוון השעון, התנע הזוויתי בציר Z חיובי (שמאל), ואם כיוון הסיבוב . הוא נגד כיוון השעון, אזי $L_z < 0$ (ימין)

כמובן שניתן לחשב את התנע הזוויתית ע"י חישוב אלגברי של המכפלה הווקטורית $\vec{r} \times \vec{p}$. למשל, עבור תנועה במישור $x-y$ נקבל $\vec{r} = (x, y, 0)$, $\vec{p} = m(v_x, v_y, 0)$. נקבל ש-

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = m(xv_y - yv_x)\hat{z} \tag{2}$$

## 3 סיבוב סביב ציר קבוע

אחד השימושים המרכזיים לתנע הזוויתי היא אנליזה של תנועת גוף קשיח. כזכור, ניתן לחלק את תנועת כל גוף קשיח לתנועת מרכז המסה, ולסיבוב סביב מרכז המסה. כאן נסתכל על מקרה פרטי, אבל חשוב מאין כמותו של סיבוב סביב ציר קבוע. "ציר קבוע": הכוונה היא שכיוון הציר אינו משתנה במרחב, ואולם מיקום הציר יכול להשתנות - לדוגמה גלגל מסתובב של מכונית.

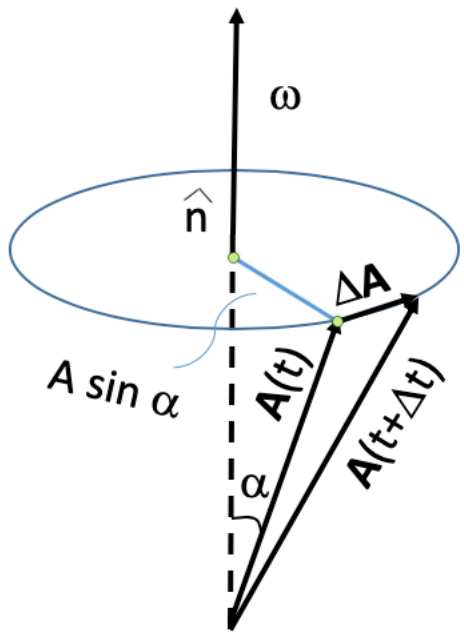
ללא הגבלת הכלליות, נניח שכיוון ציר הסיבוב הוא בכיוון ציר $z$ (אחרת, פשוט נסובב את הקואורדינטות).

כאשר גוף קשיח מסתובב סביב ציר, המרחק בין כל חלקיק בתוך הגוף ובין הציר נשאר קבוע. לכן, אם נבחר מערכת קואורדינטות בה המרכז הוא ציר הסיבוב (ציר $z$) נקבל שעבור כל חלקיק המרכיב את הגוף, $|\vec{r}| = const$. נשים לב, שמיקום החלקיק $\vec{r}$ יכול להשתנות בזמן ש- $|\vec{r}|$ נשמר רק אם ווקטור המהירות אנכי ל- $\vec{r}$.

מאחר והסיבוב הוא סביב ציר, מכאן ולהבא נתאר את וקטור מיקום החלקיק כ-

$$\vec{r} = \vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel} \tag{3}$$

כאשר $\vec{r}_{\perp}$, $\vec{r}_{\parallel}$ הם רכיבי וקטור המיקום בניצב ובמקביל לציר הסיבוב (ראה איור 3).




איור 3: חלוקת וקטור המיקום לרכיבים במקביל ובניצב לציר הסיבוב (ציר $z$).

נתבונן בגוף נקודתי כלשהו המסתובב סביב ציר $z$. גודל וקטור המהירות שלו הוא

$$|\vec{v}| = |\dot{\vec{r}}| = \omega r_{\perp} \tag{4}$$

כאשר $r_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2}$ הוא המרחק האופקי מציר הסיבוב.
התנע הזוויתי של החלקיק נתון ע"י

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \tag{5}$$

אנחנו מתמקדים כאן בסיבוב סביב ציר $z$: אנחנו מניחים ספציפית שהתנע הזוויתי נשאר בכיוון $z$, $\vec{L} = L_z$. וקטור המהירות נמצא במישור $x - y$ ולכן נקבל[1]

$$L_z = m r_{\perp} v = m r_{\perp}^2 \omega \tag{6}$$

כעת נתבונן בגוף שאינו נקודתי. כל גוף כזה ניתן לפירוק של אוסף של גופים נקודתיים, ולכן התנע הזוויתי שלו הוא סכום התנאים הזוויתיים של $j$ הגופים הנקודתיים המרכיבים אותו, כלומר

$$L_z = \sum_j L_{j,z} = \sum_j m_j r_{\perp,j}^2 \omega \tag{7}$$

כמובן שעבור גוף קשיח, המהירות הזוויתית $\omega$ היא קבועה עבור כל החלקיקים השונים.

[1] בפועל, התעלמנו מ- $r_{\parallel} \times v$. ההתעלמות מוצדקת כל עוד הגוף מסתובב סביב ציר $z$, כלומר הנחנו שקיים אילוץ חיצוני המחייב את הגוף להסתובב סביב ציר זה.

## 3.1 מומנט האינרציה

נרשום את משוואה 7 כ-

$$L_z = I\omega, \tag{8}$$

כש-

$$\boxed{I \equiv \sum_j m_j r_{\perp,j}^2} \tag{9}$$

נקרא **מומנט האינרציה**. מומנט האינרציה תלוי בהתפלגות מסת הגוף ביחס לציר הסיבוב.

משוואה 8 מראה אנלוגיה בין תנע זוויתי, ותנע קווי, $p = mv$. בתנועה סיבובית, למומנט האינרציה תפקיד דומה לזה של המסה בתנועה קווית:

$$v \leftrightarrow \omega \quad , \quad m \leftrightarrow I \tag{10}$$

אם התפלגות המסות היא רציפה, יש להחליף את הסכום על החלקיקים באינטגרל על אלמנטי מסה:

$$\sum_j m_j r_{\perp,j}^2 \quad \rightarrow \quad \int r_\perp^2 dm \tag{11}$$

$$I = \int r_\perp^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm = \int (x^2 + y^2) \rho dV \tag{12}$$

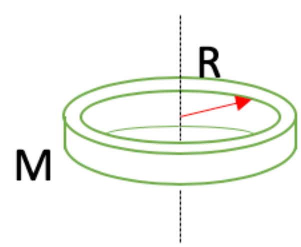
כאשר רשמנו את אלמנט המסה כפונקציה של אלמנט נפח- $dm = \rho dV$. כאן $\rho$ היא הצפיפות.

<u>הערה:</u> שם נוסף למומנט האינרציה הוא **מומנט ההתמד**.

## 3.2 חישוב מומנטי אינרציה של מספר גופים פשוטים.

### 3.2.1 טבעת אחידה

נחשב את מומנט האינרציה עבור טבעת אחידה בעלת מסה $M$ ורדיוס $R$ המסתובבת סביב ציר הסימטריה שלה (ראה איור 4).



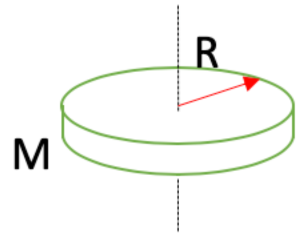

איור 4: טבעת אחידה המסתובבת סביב מרכזה

נניח שעובי הטבעת ניתן להזנחה. מאחר שהטבעת אחידה, נוכל להגדיר את צפיפות המסה האורכית = המסה ליחידת אורך, כ- $\lambda = M/2\pi R$. מכאן, שנוכל לרשום אלמנט מסה - המסה הנמצאת ביחידת אורך $dl$ כ- $dM = \lambda dl$. בהנחה שעובי הטבעת זניח, נקבל ש- $R = R_\perp$, ומכאן

$$I_{ring} = \int_0^{2\pi R} R^2 \lambda dl = R^2 \left( \frac{M}{2\pi R} \right) l|_0^{2\pi R} = MR^2 \tag{13}$$

### 3.2.2 דיסקה דקה

נחשב את מומנט ההתמד של דיסקה דקה ואחידה בעלת מסה $M$ ורדיוס $R$ סביב ציר הסימטריה שלה (ראה איור 5).




איור 5: דיסקה דקה אחידה המסתובבת סביב מרכזה

הדרך הישירה ביותר היא כמובן לחלק את הדיסקה לאוסף של טבעות, כל אחת ברדיוס $\rho$ ובעובי $d\rho$ ובעלת מומנט אינרציה $dI$. מומנט האינרציה של הדיסקה יחושב על ידי אינטגרציה, $I = \int dI$.

את אלמנט המסה בכל טבעת נחשב על ידי כך שנשים לב שאלמנט שטח של כל טבעת הוא

$$dA = 2\pi\rho d\rho$$

ולכן מסת כל טבעת היא

$$dm = M\frac{dA}{A} = M\frac{2\pi\rho d\rho}{\pi R^2} = \frac{2M\rho}{R^2}d\rho \tag{14}$$

ומכאן

$$dI = \rho^2 dm = \frac{2M\rho^3}{R^2}d\rho \tag{15}$$

וסה"כ

$$I = \int_0^R \frac{2M\rho^3}{R^2}d\rho = \frac{1}{2}MR^2 \tag{16}$$

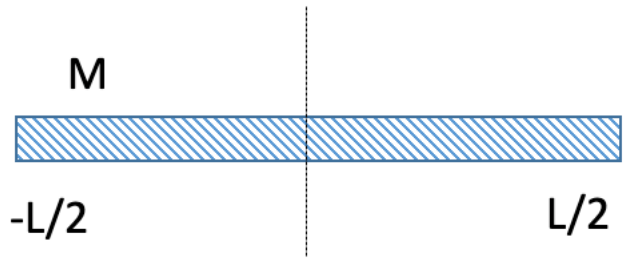
### 3.2.3 מוט אחיד

נחשב את מומנט האינרציה של מוט אחיד דק בעל מסה $M$ ואורך $L$ המסתובב סביב ציר אנכי העובר דרך מרכזו (ראה איור 6).

$$I_{rod,o} = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dm = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{M}{L}\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12}ML^2 \tag{17}$$

ובמקרה בו ציר הסיבוב נמצא בקצה המוט, נקבל

$$I_{rod} = \frac{M}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3}ML^2 \tag{18}$$




איור 6: מוט בעל צפיפות אחידה המסתובב סביב מרכזו

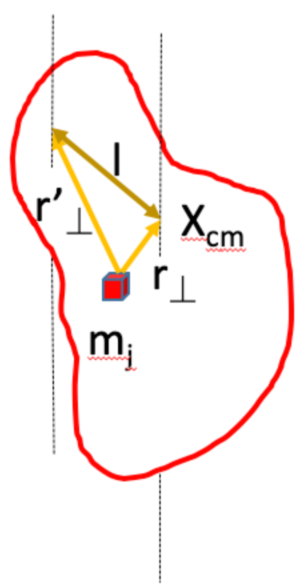
### 3.3 משפט שטיינר (משפט הצירים המקבילים)

נניח שידוע לנו מומנט האינרציה של גוף מסויים עבור סיבוב סביב ציר העובר דרך מרכז המסה שלו, $I_0$. משפט הצירים המקבילים מאפשר לנו לחשב במהירות את מומנט האינרציה של הגוף, $I$ עבור סיבוב סביב ציר המקביל לציר הראשון. כאשר המרחק בין הצירים הוא $l$, מתקיים

$$\boxed{I = I_0 + Ml^2} \tag{19}$$

כש -$M$ היא מסת הגוף.

הוכחת המשפט פשוטה מאוד. נתבונן באלמנט מסה $m_j$. נסמן את ווקטור המיקום שלו בניצב לציר הסיבוב העובר דרך מרכז המסה ב- $r_\perp$ ואת המיקום ביחס לציר החדש ב- $r'_\perp$ (ראה איור 7).




איור 7: חישוב מומנט האינרציה סביב ציר שאינו עובר דרך מרכז הכובד

מחיבור ווקטורים מתקיים

$$r'_{\perp,j} = r_{\perp,j} + l \tag{20}$$

ולכן מומנט האינרציה של הגוף בסיבוב סביב הציר שאינו עובר דרך מרכז המסה הוא

$$I_A = \sum_j m_j {r'_{\perp,j}}^2 = \sum_j m_j (r_{\perp,j} + l)^2 = \sum_j m_j (r_{\perp,j}^2 + 2r_{\perp,j} \cdot l + l^2) \tag{21}$$

האיבר הראשון מצד ימין הוא מומנט האינרציה עבור סיבוב סביב מרכז המסה,

$$\sum_j m_j r_{\perp,j}^2 = I_{CM} \tag{22}$$

האיבר השני מימין מתאפס עקב הגדרת מרכז המסה:

$$\sum_j m_j r_{\perp,j} \cdot l = (\sum_j m_j r_{\perp,j}) \cdot l = 0 \cdot l = 0 \tag{23}$$

(נשים לב ש- $r_{\perp,j}$ הוא המרחק המשיקי של נקודה $j$ ממרכז המסה, ולכן, מהגדרת מרכז המסה, סכום כל המרחקים מתאפס).

ואילו האיבר האחרון הוא

$$\sum_j m_j l^2 = l^2 M \tag{24}$$

ולכן קיבלנו סה"כ את משוואה 19 .

דוגמה: חישבנו קודם את מומנט האינרציה של מוט סביב ציר העובר בקצהו. שימוש במשפט שטיינר ייתן

$$I_a = \frac{1}{12}Ml^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2 \tag{25}$$

# 4 מומנט פיתול (Torque)

הערה: עקב סיבה לא ברורה (לי), בשפה העיברית למומנט האינרציה ולמומנט הפיתול - הקרוי בקיצור מומנט, שמות דומים, אם כי הכוונה היא לגדלים אחרים לחלוטין. בשפה האנגלית, הבעיה לא קיימת. מומנט ההתמדד נקרא, כצפוי, Moment of Inertia , ואילו מומנט הפיתול (או, המומנט) נקרא Torque .

כאמור, לתנועה הזוויתית אנלוגיה חזקה לתנועה הקווית. נמשיך בפיתוח האנלוגיה על ידי מציאת האנלוג לכוח בתנועה הקווית. האנלוג הוא **המומנט**, $\vec{T}$. המומנט הנוצר על ידי כוח $\vec{F}$ הפועל על גוף הנמצא במיקום $\vec{r}$ מוגדר על ידי

$$\vec{T} \equiv \vec{r} \times \vec{F} \tag{26}$$

את המומנט נחשב בדיוק באותו אופן בו מחושב התנע הזוויתי.

! נשים לב: במערכת סטטית - כלומר בשיווי משקל, סכום הכוחות מתאפס, וכן סכום המומנטים **בכל נקודה**. לכן, כאשר מבצעים אנליזה של מערכת הנמצאת בשיווי משקל, כאשר מחשבים את המומנט כדאי לבחור נקודה עליה פועלים מספר כוחות, כיוון שבנקודה זו המיקום $\vec{r}$ ולכן המומנטים המופעלים על ידי הכוחות- מתאפסים.

המומנט הוא האנלוג של הכוח, שכן הוא קובע את קצב השינוי של התנע הזוויתי:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right) \tag{27}$$

האיבר הראשון מצד ימין הוא

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right) = \vec{v} \times m\vec{v} = 0 \tag{28}$$

שכן מכפלה וקטורית של ווקטור עם עצמו מתאפסת.

מאחר ש- $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ נקבל מייד ש-

$$\boxed{\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt}} \tag{29}$$

משוואה 29 היא כמובן האנלוג לחוק התנועה של ניוטון במערכת מסתובבת.
כאשר ציר הסיבוב קבוע (אינו נע במרחב בזמן), ניתן להמשיך את האנלוגיה עם תנועה קווית. כזכור, התנע הזוויתי מוגדר על ידי

$$L_z = I\omega$$

(הינחנו כיוון $z$ קבוע, ללא הגבלת הכלליות) ומכאן שכאשר פועל מומנט חיצוני נקבל

$$T_z = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt} \equiv I\alpha \tag{30}$$

כאשר $\alpha$ היא **התאוצה הזוויתית**. משוואה זו כמובן אנלוגית לחוק התנועה של ניוטון- $\vec{F} = m\vec{a}$.
נוכל להמשיך עם האנלוגיה על ידי חישוב האנרגיה הקינטית של גוף הנע בתנועה סיבובית בלבד:

$$E_k = \sum_j \frac{1}{2}m_j v_j^2 = \sum_j \frac{1}{2}m_j r_{\perp,j}^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{31}$$

כאשר השתמשנו ב- $v_j = r_{\perp,j}\omega$, ובהגדרת מומנט האינרציה.
האנלוגיה עם האנרגיה הקינטית המשוייכת לתנועה קווית, $E_k = \frac{1}{2}Mv^2$ ברורה.

## 4.1 חוק שימור התנע הזוויתי

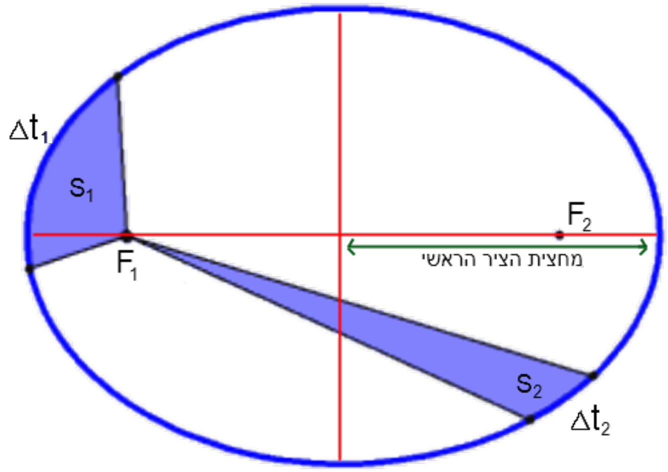
ממשוואה 29 עולה מיד שבהעדר מומנט, $\vec{T} = 0$ התנע הזוויתי נשמר, $\vec{L} = const$. כמו שאר חוקי השימור שלמדנו (חוק שימור התנע הקווי וחוק שימור האנרגיה) גם תוצאה זו שימושית ביותר בניתוח תנועה של גופים. נראה זאת באמצעות הדוגמה הבאה.

### 4.1.1 תנועה תחת השפעת כוח מרכזי: החוק השני של קפלר

ב- 1609 האסטרונום יוהנס קפלר פרסם את שני חוקי התנועה הראשונים שלו (החוק השלישי פורסם מעט מאוחר יותר). חוקים אלו, שקיבלו השראה מעבודות מוקדמות יותר של ניקולאוס קופרניקוס, היוו את אחד הבסיסים החשובים ביותר עליהם בנה ניוטון את תיאוריית הכבידה מאוחר יותר.
החוק הראשון של קפלר טוען שתנועת כוכבי הלכת סביב השמש אינה מעגלית, כי אם אליפטית, כאשר השמש נמצאת באחד ממוקדי האליפסה. החוק השני הוא **חוק השטחים השווים**: הקו שמחבר את כוכב הלכת עם השמש מכסה שטחים שווים במרווחי זמן שווים. משמעות חוק זה היא שככל שכוכב הלכת נע קרוב יותר לשמש מהירותו גדלה (ראה איור 8).
נראה כאן שהחוק השני של קפלר נובע ישירות מחוק שימור התנע הזוויתי.
נניח גוף שנע השפעת כוח מרכזי, $\vec{F}(r) = f(r)\hat{r}$. המומנט הפועל על הגוף ביחס לראשית מתאפס, שכן

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times f(r)\hat{r} = 0$$

מכאן, שהתנע הזוויתי - הן הגודל והן הכיוון, נשמרים. כתוצאה משימור כיוון התנע הזוויתי, נקבל מיד שתנועת הגוף מישורית.
נתבונן כעת על חלקיק הנמצא בזמן $t$ במיקום (בקואורדינטות קוטביות) $(r,\theta)$. בזמן מאוחר יותר, $t + \Delta t$ מיקומו של החלקיק הוא $r + \Delta r, t + \Delta t$.




איור 8: החוק השני של קפלר: הקו שמחבר את כוכב הלכת עם השמש מכסה שטחים שווים במרווחי זמן שווים. (מקור: וויקיפדיה)

השטח שהגוף כיסה הוא בקירוב טוב שטח משולש, בעל אורך $r$ ורוחב $rd\theta$,

$$\Delta A \approx \frac{1}{2}r \times r\Delta\theta$$

ולכן קצב השטח ש"נאסף" הוא

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} \tag{32}$$

נרשום את מהירות החלקיק בקואורדינטות קוטביות:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

ומכאן נחשב את התנע הזוויתי שלו:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = r\hat{r} \times m(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = mr^2\dot{\theta}\hat{z} \tag{33}$$

כאשר השתמשנו ב- $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{z}$.
ומכאן נקבל

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{L_z}{2m} \tag{34}$$

ומאחר שהראינו ש- $L_z$ קבוע עבור תנועה בהשפעת כוח מרכזי, נקבל ש- $dA/dt$ גם הוא קבוע.

## רשימת מקורות


[1] Kleppner, D. & Kolenkow, R., *"An Introduction to Mechanics"* (Cambridge), second edition.
[2] Kittel, C., *"Mechanics"* (Berkeley Physics Course Vol. 1, McGraw-Hill);



תרגום לעברית על ידי האוניברסיטה הפתוחה