מכניקה - הרצאה 7: אנרגיה ועבודה

אסף פאר

16 ביוני 2020

הערה חשובה: סיכומי ההרצאות מבוססים על הרצאותיהם של **ד״ר יוסי בן ציון** כפי שהוקלדו על ידי **מיי מרקמן**, ושל **פרופסור דייוד קסלר** . כמו כן, ההרצאות מבוססות על מקורות [1] ו-[2]. כל האיורים מועתקים מסיכומיה של מיי מרקמן.

1 מבוא

באופן עקרוני, כאשר ידועים הכוחות הפועלים על גוף, ניתן תמיד להשתמש בחוקי ניוטון בכדי לחשב את תנועתו ואת מיקומו המשתנה בזמן.

אלא שלעיתים קרובות אנחנו נתקלים בבעיה טכנית. על מנת לבצע את החישוב, נדרש לדעת את הכוח כפונקציה של הזמן - $\vec{F}=\vec{F}(t)$ ואולם ברוב הבעיות שאנחנו נתקלים בהם, הכוח נתון כפונקציה של המיקום, $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$. כדוגמה, חשבו על הכוח שמפעיל קפיץ, או על כוח הכובד - שניהם ידועים כפונקציה של המיקום, לא של הזמן.

אומנם נכון שהבעיה היא טכנית במהותה - תמיד ניתן להשתמש בתרגילים מתימטיים בכדי למצוא פתרונות למשוואות (הדיפרנציאלית). ואולם פתרונות כאלה לא יוסיפו לנו כל אינטואיציה או הבנה פיסיקלית על הבעיה.

במקום זה, נחפש שיטה אלגנטית יותר לפתור את בעית התנועה, שתיתן לנו הבנה מעמיקה יותר על אופי הבעיה הפיסיקלית (ותוביל אותנו לאחד מחוקי השימור החשובים ביותר בפיסיקה - חוק שימור האנרגיה).

2 פתרון של משוואת התנועה במימד יחיד

נתחיל במקרה הפשוט של תנועה חד מימדית - כפי שמאפיינת הרבה מערכות פיסיקליות (למשל, אוסצילטור הרמוני).

משוואת התנועה החד מימדית היא

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=m\frac{dv}{dt}=F(x) \tag{1}$$

(הינחנו גוף נקודתי בעל מסה קבועה).

נתחיל מפתרון פורמלי של המשוואה, ע״י אינטגרציה על x :

$$m\int_{x_a}^{x_b}\frac{dv}{dt}dx=\int_{x_a}^{x_b}F(x)dx \tag{2}$$

בהנחה שהכוח ידוע בכל נקודה, ניתן תמיד לפתור את האינטגרל מצד ימין (לעיתים נאלץ להשתמש בשיטות נומריות - קרי במחשב).

על מנת לפתור את האינטגרל מצד שמאל, נשתמש בטריק קטן (וסטנדרטי) של שינוי משתנה. נרשום

$$dx=\left(\frac{dx}{dt}\right)dt=vdt \tag{3}$$

ולכן

$$
\begin{aligned}
m\int_{x_a}^{x_b}\frac{dv}{dt}dx &= m\int_{t_a}^{t_b}\frac{dv}{dt}v\,dt \\
&= m\int_{t_a}^{t_b}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)dt \\
&= \frac{1}{2}mv^2\Big|_{t_a}^{t_b} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2
\end{aligned}
\tag{4}
$$

נציב במשוואה 2 ונקבל

$$
\boxed{\frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = \int_{x_a}^{x_b}F(x)dx}
\tag{5}
$$

לגדלים המופיעים במשוואה יש אינטרפרטציה פיסיקלית ברורה. הגודל

$$
\boxed{E_k \equiv \frac{1}{2}mv^2}
\tag{6}
$$

נקרא **האנרגיה הקינטית** של הגוף, ומסומן כ- K או E_k.

הגודל

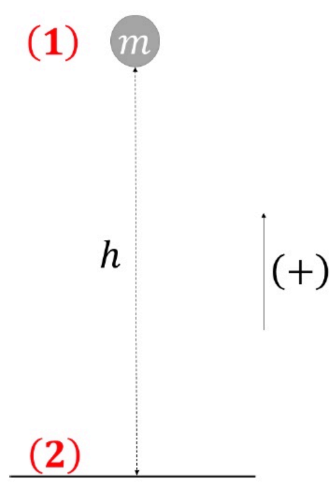
$$
\boxed{W \equiv \int_{x_a}^{x_b}F(x)dx}
\tag{7}
$$

נקרא **העבודה** הנעשית על החלקיק על ידי הכוח F, ומסומנת W.

יחידות. במערכת SI יחידות של עבודה ואנרגיה הן ג'אול, $1J = N\cdot m = kg\ m^2/s^2$. יחידה נפוצה נוספת היא קלוריה. $1cal = 4.18J$. במזון, בדרך כלל מתכוונים לקילוקלוריה, $1kcal = 4180J$.

2.1 דוגמה: גוף בנפילה חופשית

נניח גוף המשתחרר ממנוחה מגובה h . לגוף מסה m. נרצה לחשב את מהירותו של הגוף כאשר הוא מגיע לקרקע.



איור 1: גוף נופל נפילה חופשית

לפי משפט העבודה - אנרגיה (משוואה 5) ,

$$
\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W
$$

מאחר שהגוף משתחרר ממנוחה, נתון $v_1 = 0$ ולכן

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = W$$

הכוח (היחיד) הפועל על הגוף בעת נפילתו הוא כוח הכובד, $\vec{F} = m\vec{g}$ ולכן

$$W = \int_h^0 -mgdy = mgh$$

ומכאן

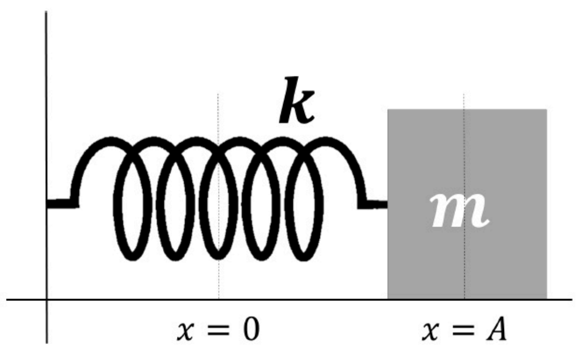
$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgh \;\; \rightarrow \;\; v_2 = \sqrt{2gh}$$

2.2 דוגמה 2: משוואות התנועה של אוסצילטור הרמוני (שוב)

בשיעורים הקודמים פתרנו את בעית האוסצילטור ההרמוני, למעשה על ידי ניחוש התשובה. כעת נפתור שוב, אבל הפעם באמצעות שימוש במשוואת העבודה - אנרגיה. כפי שנראה, כאן לא נצטרך לנחש כלום.

נניח גוף בעל מסה M המחובר לקפיץ. נסמן את הנקודה בה הקפיץ במנוחה כ- $x = 0$. בסימון זה, הכוח שמפעיל הקפיץ הוא

$$F = -kx$$



איור 2: גוף מחובר לקפיץ ונע בתנועה חד מימדית

נניח שהגוף נע מנקודה x_0 (לאו דווקא 0) לנקודה x. ממשוואת העבודה - אנרגיה נקבל

$$\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = -k\int_{x_0}^{x} xdx = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

כאשר v_0 היא מהירותו של הגוף בנקודה x_0.

למעשה, עד כאן אפשר להגיע מפתרון ישיר של משוואת התנועה. על מנת להשלים את הפתרון, עלינו להגדיר את תנאי ההתחלה - כלומר המיקום ההתחלתי x_0 והמהירות ההתחלתית v_0 בזמן התחלה כלשהו t_0.

לשם הפשטות, נניח את תנאי ההתחלה הבאים: בזמן $t = 0$ הגוף משוחרר ממנוחה, ולכן $v_0 = 0$. נקבל מיד ש-

$$v^2 = \frac{k}{M}\left(x_0^2 - x^2\right)$$

מאחר ש- $v = dx/dt$ נרשום

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{M}}\sqrt{x_0^2 - x^2} = \omega\sqrt{x_0^2 - x^2}$$

כשהשתמשנו שוב ב- $\omega \equiv \sqrt{k/M}$.

למעשה, מצאנו את המהירות כפונקציה של המיקום, $v = v(x)$. אבל מה שאנחנו באמת רוצים זה למצוא את המיקום כפונקציה של הזמן, $x = x(t)$. לשם כך, נארגן מחדש את המשוואה, ונבצע אינטגרציה:

$$\frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \omega dt \quad \rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{x_0^2 - x'^2}} = \omega \int_0^t dt = \omega t$$

בפועל, השתמשנו בשיטה הנקראת **הפרדת משתנים**: קיבצנו את כל הפונקציות התלויות בנעלמים עליהם מבצעים אינטגרציה לאגף אחד.

האינטגרל באגף שמאל הוא אינטגרל סטנדרטי, שפתרונו נמצא בכל טבלת אינטגרלים. הוא שווה ל-

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{x_0^2 - x'^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right)\Bigg|_{x_0}^{x} = \arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right) - \arcsin(1)$$

מאחר ש- $\arcsin(1) = \pi/2$ נוכל להציב במשוואה ולקבל

$$\arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right) = \frac{\pi}{2} + \omega t$$

או

$$x = x_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = x_0 \cos(\omega t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right)$$

כמובן שהפתרון מקיים את תנאי ההתחלה, $x(t=0) = x_0, v(t=0) = 0$ וזהה (עבור תנאי ההתחלה שהגדרנו) לפתרון שניחשנו קודם.

2.3 דוגמה 3: תנועה בשדה כבידה

נתון גוף שמסתו m הנמצא על פני כדור הארץ. הגוף נורה כלפי מעלה. מה צריכה להיות מהירותו ההתחלתית על מנת שיוכל לעזוב את כדור הארץ? (מהירות זו נקראת "מהירות הבריחה").

לפי משפט העבודה - אנרגיה,

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = W_G$$

כאשר v_i, v_f הן המהירויות התחילית והסופית של המסה, ו- W_G היא העבודה הנעשית על ידי כוח הכבידה.

העבודה הנעשית כאשר הגוף מתרומם מרדיוס R_E לרדיוס r ממרכז כדור הארץ מחושבת ע"י

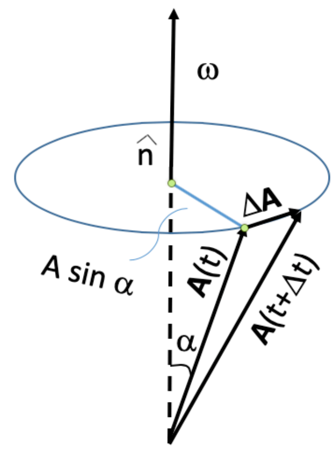
$$W_G = \int_{R_E}^{r} F(r)dr = -\int_{R_E}^{r} \frac{GM_e m}{r'^2}dr' = -GM_e m \int_{R_E}^{r} \frac{dr'}{r'^2} = GM_E m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_E}\right)$$

כלומר סה"כ קיבלנו

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = GM_E m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_E}\right)$$

בנקודה הגבוהה ביותר במסלול, המהירות היא $v_f = 0$. לכן נקבל

$$v_i^2 = 2GM_E\left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{r_{\max}}\right)$$



איור 3: מסה ממריאה מכדור הארץ

על מנת שהגוף יוכל לברוח מכדור הארץ, נדרוש ש- $r_{\max} \to \infty$ ונקבל

$$v_{i,escape} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} = \sqrt{2gR_E} \simeq 1.1 \times 10^4 \text{ m/s}$$

כאשר השתמשנו ב- $g = GM_E/R_E^2$.

3 משפט העבודה - אנרגיה במספר מימדים

ההכללה למערכת רב מימדית היא מיידית, תוך שימוש בתכונות הווקטורים:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_a^b m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt \\ &= \int_a^b \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(v^2\right) dt \\ &= \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 \end{aligned} \tag{9}$$

כאשר השתמשנו ב- $\Delta\vec{r} = \vec{v}\Delta t$ ובזהות הווקטורית

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(v^2\right)$$

האנרגיה הקינטית תלויה רק בגודל ווקטור המהירות, ולכן הגדרתה אינה משתנה מהמקרה החד מימדי (משוואה 6). לעומת זאת, העבודה הנעשית על ידי כוח $\vec{F}$ על החלקיק, כאשר החלקיק נע מנקודה a לנקודה b היא

$$W_{ba} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{10}$$

כלומר: רק רכיב הכוח בכיוון $\vec{r}$ (הרכיב האנכי של הכוח, $F\cos\theta$ כש - θ הזווית בין $\vec{F}$ ל- $\vec{r}$) תורם לעבודה המבוצעת על החלקיק.

3.1 הספק (power)

ההספק (power) מוגדר כקצב שבו מתבצעת עבודה.

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{11}$$

ההספק יכול להיות חיובי או שלילי - חיובי אם עבודה מבוצעת **על** החלקיק, ושלילי אם החלקיק מבצע עבודה על הסביבה.

במערכת SI , יחידות ההספק הם $Watt = Joules/s = kg \cdot m^2/s^3$ יחידות אחרות שאולי שמעתם עליהן הם כוח סוס (כ״ס). 1כ״ס = 746 וואט.

4 כוחות משמרים

משפט העבודה - אנרגיה הוא שימושי מאוד בפיסיקה.

$$W_{ba} = E_{k,b} - E_{k,a} \tag{12}$$

הבעיה המרכזית היא חישוב העבודה:

$$W_{ba} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{13}$$

כפי שאולי שמתם לב, האינטגרל במשוואה 13 הוא **תלוי מסלול**: על מנת לחשב את האינטגרל, עלינו לדעת את המסלול שעבר החלקיק.

תכונה זו מקשה מאוד (ברמה העקרונית) על שימוש במשפט. למזלנו, ישנם שני מקרים חשובים מאוד אשר מאפשרים שימוש מהיר במשפט הזה.

עבור הרבה כוחות חשובים בטבע, האינטגרל **אינו** תלוי במסלול, אלא רק בנקודות הקצה - ההתחלה והסיום. כוחות אלה נקראים **כוחות משמרים**. לשמחתינו, רוב הכוחות החשובים בטבע הם כוחות משמרים.

המקרה השני בו נוח להשתמש במשפט העבודה - אנרגיה, הוא במקרה של תנועה **תחת אילוצים**. באילוץ, הכוונה היא שאנחנו מכריחים את הגוף לנוע במסלול נתון, על ידי הפעלת כוחות עליו: לדוגמה, מטוטלת בעלת אורך חוט קבוע. בדוגמה זו, כמו בדוגמאות רבות אחרות (אך לא בהכרח תמיד), הכוח המאלץ לא מבצע עבודה !: את זה ניתן לראות כששמים לב שהכוח המאלץ (בבעיות מסוימות) אנך לכיוון המהירות, ולכן אנך למסלול התנועה: $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = 0$. כלומר, לעיתים הכוח המאלץ רק משנה את כיוון המהירות, אך לא את גודלה.

4.1 דוגמאות לכוחות משמרים

לשמחתינו, רוב הכוחות החשובים בפיסיקה הם כוחות משמרים.

-

4.1.1 כוח אחיד

כדוגמה ראשונה לכוח משמר, נסתכל על כוח אחיד, $\vec{F} = F_0\hat{n}$ כאשר $\hat{n}$ הוא ווקטור יחידה בכיוון הכוח (כלשהו). נחשב את העבודה שהכוח מפעיל על חלקיק הנע במסלול שרירותי כלשהוא מנקודה $\vec{r}_a$ לנקודה $\vec{r}_b$:

$$\begin{aligned} W_{ba} &= \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= F_0 \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \hat{n} \cdot d\vec{r} \\ &= F_0\hat{n} \cdot \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} d\vec{r} \\ &= F_0\hat{n} \cdot \left(\hat{i} \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} dx + \hat{j} \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} dy + \hat{k} \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} dz\right) \\ &= F_0\hat{n} \cdot \left[\hat{i}(x_b - x_a) + \hat{j}(y_b - y_a) + \hat{k}(z_b - z_a)\right] \\ &= F_0\hat{n} \cdot [\vec{r}_b - \vec{r}_a] \end{aligned} \tag{14}$$

כלומר, הוכחנו שהעבודה שמפעיל כוח קבוע תלויה רק בהעתקה $\vec{r}_b - \vec{r}_a$, אך לא במסלול.

4.1.2 כוח מרכזי

אולי הדוגמה החשובה ביותר לכוח משמר הוא **כוח מרכזי**. כוח מרכזי מוגדר ככוח רדיאלי, אשר גודלו תלוי רק במרחק מהמקור. דוגמאות לכוחות מרכזיים - כוח הכבידה והכוח החשמלי.

בשפה מתימטית, כוח מרכזי מקבל את הצורה $\vec{F} = f(r)\hat{r}$. נחשב את העבודה אשר כוח זה מבצע על חלקיק הנע במישור (לשם הפשטות, החישוב מבוצע במישור הדו מימדי).

$$\begin{aligned} W_{ba} &= \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} f(r)\hat{r} \cdot \left(dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta}\right) \\ &= \int_a^b f(r)dr \end{aligned} \tag{15}$$

כאשר השתמשנו באורתוגונליות $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0$. כלומר, האינטגרל הפך לאינטגרל חד מימדי פשוט בין הרדיוס ההתחלתי לסופי.

! נשים לב: עבור כוח משמר, מתקיים $W_{ab} = -W_{ba}$. כלומר, העבודה המבוצעת על ידי כוח משמר בתנועה במסלול סגור מתאפסת.

$$\boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0} \tag{16}$$

לא כל הכוחות הם כוחות משמרים. דוגמה קלאסית לכוח שאינו משמר הוא כוח החיכוך.

4.2 כוחות משמרים ושימור אנרגיה מכנית

כיוון שהעבודה המבוצעת על ידי כוחות משמרים אינה תלויה במסלול בו נע החלקיק אלא רק בנקודות ההתחלה והסיום, נוכל לרשום

$$\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -U(\vec{r}_b) + U(\vec{r}_a) \tag{17}$$

כאשר $U(\vec{r})$ היא פונקציה כלשהיא (המוגדרת על ידי משוואה 17) של המיקום.

הפונקציה $U(\vec{r})$ ידועה בשם **אנרגיה פוטנציאלית** .

עבור כוחות משמרים, משוואת העבודה-אנרגיה הופכת ל:

$$\begin{aligned} &W_{ba} = E_{k,b} - E_{k,a} = -U_b + U_a \\ &\boxed{\rightarrow E_{k,a} + U_a = E_{k,b} + U_b} \end{aligned} \tag{18}$$

כלומר, בתנועה של חלקיק אשר פועל עליו כוח משמר, מתקיים שהגודל

$$\boxed{E = E_{k,a} + U_a = E_{k,b} + U_b} \tag{19}$$

נשמר. הגודל E נקרא **האנרגיה המכנית הכללית** של החלקיק.

נשים לב לשתי נקודות:

(1). חוק שימור האנרגיה (משוואה 19) כפי שנוסח כאן נובע ישירות מחוקי התנועה של ניוטון. ואולם, כפי שטענתי בדיון על חוק שימור התנע, הוא למעשה נחשב כיותר "בסיסי" מחוקי ניוטון, שכן הוא מתקיים גם במערכות לא ניוטוניות. הבנה של חוק שימור האנרגיה מאפשרת הבנה מעמיקה הרבה יותר של הטבע.

(2). הערך המדוייק של האנרגיה E הוא שרירותי, ונקבע בהתאם לבחירה שלנו של $U(\vec{r})$. למעשה, יש משמעות פיסיקלית רק **להפרש** באנרגיות. זה נובע מכך שתמיד ניתן להוסיף או להחסיר גודל קבוע מהאנרגיה הפוטנציאלית $U(\vec{r})$.

5 אנרגיה פוטנציאלית

הגדרנו את האנרגיה הפוטנציאלית (למעשה: את הפרש האנרגיה הפוטנציאלית) באמצעות משוואה 17,

$$\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -U(\vec{r}_b) + U(\vec{r}_a)$$

כאמור, רק הפרשי האנרגיה הפוטנציאלית מוגדרים, אך לא ערכה המוחלט, שיכול להשתנות בקבוע.
נחשב את האנרגיה הפוטנציאלית של מספר כוחות.

5.1 האנרגיה הפוטנציאלית של כוח אחיד

ראינו (בסעיף 4.1.1) שעבור כוח אחיד מתקיים $W_{ba} = \vec{F}_0 \cdot (\vec{r}_b - \vec{r}_a)$.
לדוגמה, על חלקיק בעל מסה m בשדה כבידה אחיד פועל כוח $-mg\hat{z}$. לכן, אם חלקיק נע מ- $\vec{r}_a$ ל- $\vec{r}_b$ הפרש הפוטנציאל הוא

$$U_b - U_a = -\int_{z_a}^{z_b} (-mg)dz = mg(z_b - z_a) \tag{20}$$

בדרך כלל נוח להגדיר את הקבוע $U(z=0) = 0$, ואולם כל קבוע אחר טוב באותה מידה. במקרה זה נקבל את התוצאה הידועה, $U(z) = mgz$.
דוגמה: גוף נזרק כלפי מעלה במהירות התחלתית $\vec{v} = v_0\hat{z}$. מהי מהירותו כאשר הוא בגובה h ?
נשתמש בשימור האנרגיה:

$$E_k(0) + U(0) = E_k(h) + U(h)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2(h) + mgh \quad \rightarrow \quad v(h) = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

5.2 האנרגיה הפוטנציאלית של כוח מרכזי

כזכור, לכוח מרכזי הצורה $\vec{F} = f(r)\hat{r}$, כאשר $f(r)$ היא פונקציה (כלשהיא) של המרחק מהראשית. לכן

$$U_b - U_a = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{r_a}^{r_b} f(r)dr \tag{21}$$

דוגמה חשובה במיוחד היא **הכוח הריבועי ההפוך**, $f(r) = A/r^2$. דוגמה זו נכונה הן לכוח הכבידה והן לכוח החשמלי (כוח קולומב). במקרה זה מתקיים

$$U_b - U_a = -\int_{r_a}^{r_b} \frac{A}{r^2}dr = \frac{A}{r_b} - \frac{A}{r_a} \tag{22}$$

במקרה הזה, בחירה נוחה היא $U(r \rightarrow \infty) = 0$.
נקבל, ע"י הצבה $r_a \rightarrow \infty$, $U_b \leftrightarrow U(r)$

$$\boxed{U(r) = \frac{A}{r}} \tag{23}$$

5.3 אנרגיה פוטנציאלית של קפיץ

הכוח שמפעיל קפיץ נותן ע"י

$$\vec{F}(r) = -k(r - r_0)\hat{r}$$

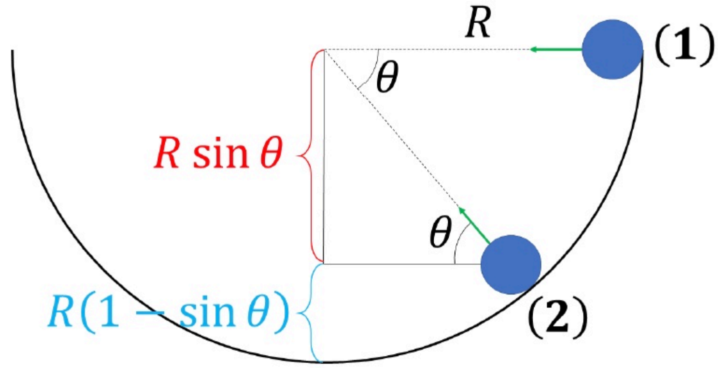
זהו כוח מרכזי, ולכן הוא משמר. נגדיר, בלי הגבלת הכלליות, $r_0 = 0$. (נקודת שיווי המשקל היא ב-0).
האנרגיה הפוטנציאלית של הקפיץ היא

$$U(r) - U(0) = -\int_0^r (-k)(r' - r_0)dr' = \int_0^r kr'dr' = \frac{1}{2}kr^2 \qquad (24)$$

נוח להגדיר $U(r_0 = 0) = 0$ ולרשום $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$.

5.4 דוגמה

נתבונן בגוף בעל מסה m המחליק על משטח בצורת חצי מעגל (ראה איור). הגוף מתחיל מהמישור האופקי. נרצה למצוא את מהירותו כתלות בזווית θ.



איור 4: גוף מחליק על מישור חצי כדורי

נבצע את החישוב בשני דרכים.
(1) שימור אנרגיה:

$$E_k(1) + U(1) = E_k(2) + U(2)$$

מאחר שהגוף מתחיל ממנוחה, $E_k(1) = 0$,

$$mgR = \frac{1}{2}mv_\theta^2 + mgh_\theta = \frac{1}{2}mv_\theta^2 + mgR(1 - \sin\theta)$$

$$\rightarrow v_\theta = \sqrt{2gR\sin\theta}$$

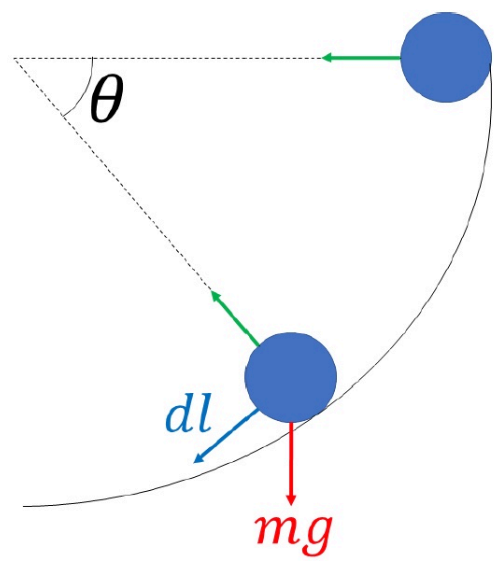
כמובן שבנקודה התחתונה ביותר, $\theta = 90^\circ \quad \rightarrow \quad v_\theta = \sqrt{2gR}$

(2) נחשב בדרך שניה, תוך שימוש במשפט העבודה - אנרגיה:
הכוח הפועל על הגוף הוא כוח הכובד.

$$E_k(2) - E_k(1) = W_{grav} \quad \rightarrow \frac{1}{2}mv_\theta^2 = \int_{\theta=0}^{\theta} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

כאן עלינו לבצע מכפלה סקלרית בין שני גדלים ווקטורים. נקבל:

$$\frac{1}{2}mv_\theta^2 = R\int_{\theta=0}^{\theta} mg\cos\theta d\theta \quad \rightarrow v_\theta = \sqrt{2gR\sin\theta}$$



איור 5: גוף מחליק על מישור חצי כדורי - כיווני כוח הכובד והמסלול

6 כוח משמר כנגזרת של פוטנציאל

בהרבה בעיות פיסיקליות, קל יותר למצוא את האנרגיה הפוטנציאלית, או בקיצור הפוטנציאל, מאשר לחשב את הכוח.
במקרה החד מימדי, נרשום את משוואה 17,

$$U_b - U_a = -\int_{x_a}^{x_b} F(x)dx$$

נתבונן בשינוי האנרגיה הפוטנציאלית כאשר הגוף נע מנקודה x ל- $x + \Delta x$. מתקבל

$$\Delta U = U(x + \Delta x) - U(x) = -\int_{x}^{x+\Delta x} F(x)dx = -F(x)\Delta x$$

כלומר בגבול $\Delta x \to 0$ מתקבל

$$\boxed{F(x) = -\frac{dU}{dx}} \tag{25}$$

כלומר, הכוח (המשמר) הוא נגזרת של הפוטנציאל.

במקרה התלת מימדי,

$$U_b - U_a = -\int_{x_a}^{x_b} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

כעת, מאחר ש- $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ נקבל (במערכת צירים קרטזית)

$$F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z \approx -\Delta U(x, y, z)$$

אם נניח ש- $y = y_0, z = z_0$ קבועים, נקבל $\Delta y = \Delta z = 0$,

$$F_x\Delta x \approx -\Delta U(x, y_0, z_0) \quad \to \quad F_x \approx -\frac{\Delta U(x, y_0, z_0)}{\Delta x}$$

! נשים לב: U, שהוא באופן כללי פונקציה של 3 משתנים (x,y,z), משתנה כאן כפונקציה של משתנה יחיד (x) . כאשר חישבנו את השינוי ב- U , אנחנו הינחנו ששני המשתנים האחרים - קבועים.

במקרה כזה, נקרא לנגזרת המתקבלת בלקיחת הגבול **נגזרת חלקית**. היא מסומנת בצורה שונה מנגזרת רגילה:

$$\boxed{F_x = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U(x; y=y_0, z=z_0)}{\Delta x} \equiv -\frac{\partial U}{\partial x}} \tag{26}$$

באופן אנלוגי בצירי y, z נקבל את רכיבי הכוח

$$F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} = -\left(\hat{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial U}{\partial z}\right) \tag{27}$$

מבחינה מתימטית, נוכל לרשום

$$\vec{F} = -\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)U = -\vec{\nabla}U \tag{28}$$

כאשר

$$\boxed{\vec{\nabla} \equiv \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)} \tag{29}$$

הוא **אופרטור וקטורי** הנקרא **nabla** (נבלה) . מקור השם הוא בכך שהוא מזכיר (קצת) בצורתו את כלי הנגינה נבל.

! במתימטיקה, אופרטור הוא אובייקט המקבל כקלט פונקציה אחת ומחזיר אחרת.

האופרטור נבלה, בדוגמה שלנו, קיבל כקלט פונקציה סקלרית (הפוטנציאל) והחזיר פונקציה ווקטורית (הכוח). במקרה זה, שמו של האופרטור הוא **גרדיינט**.

הגרדיינט הוא הכללה של הנגזרת במימד יחיד לעולם התלת מימדי. נאמר, **שהכוח הוא גרדיינט של הפוטנציאל.**

כיוון הווקטור (ווקטור הכוח) הוא בכיוון השינוי המקסימלי - כלומר הכיוון במרחב בו הפונקציה הסקלרית גדלה בשיעור הגדול ביותר. גודל הווקטור שווה לקצב השינוי המקומי בפונקציה.

במאמר מוסגר, נאמר רק שהאופרטור נבלה יכול גם לקבל כקלט ווקטור, ולהחזיר סקלר - ואז הוא נקרא דיוורגנץ, או לקבל ווקטור ולהחזיר ווקטור - ואז הוא נקרא curl .

7 כוח לא משמר - חיכוך

כאמור, לכוחות משמרים חשיבות עצומה בפיסיקה. ואולם, לא כל הכוחות הם משמרים. דוגמה לכוח לא משמר הוא חיכוך. עבור גוף בתנועה עם חיכוך, כיוון כוח החיכוך תמיד הפוך לכיוון התנועה, כך שהעבודה שמבוצעת על ידי כוח החיכוך נגרעת מהאנרגיה הקינטית הכללית.

משפט העבודה - אנרגיה לא משתנה. עלינו בפשטות להפריד את הכוחות לכוחות משמרים, $\vec{F}^c$ וכוחות לא משמרים, $\vec{F}^{nc}$. סך כל העבודה הנעשית על ידי שקול הכוחות $\vec{F}$ כשהחלקיק עובר מנקודה a ל-b:

$$W_{ba} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}^c \cdot d\vec{r} + \int_a^b \vec{F}^{nc}\cdot d\vec{r} = -U_b + U_a + W_{ba}^{nc} \tag{30}$$

כאשר U היא האנרגיה הפוטנציאלית (הקשורה רק לכוחות המשמרים) ו- W_{ba}^{nc} היא העבודה הנעשית על ידי הכוח הלא משמר.

משפט העבודה - אנרגיה יקבל את הצורה

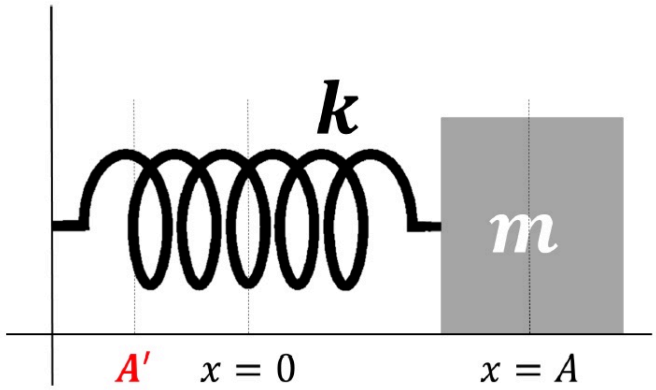
$$W_{ba}(tot) = E_k(b) - E_k(a) = -U_b + U_a + W_{ba}^{nc} \tag{31}$$

כלומר

$$E_k(b) + U_b - E_k(a) - U_a = W_{ba}^{nc} \tag{32}$$

7.1 דוגמה: קפיץ עם חיכוך

נניח גוף בעל מסה m המחובר לקפיץ בעל קבוע k ונע במישור האופקי. מקדם החיכוך בין הגוף והמישור הוא μ. הגוף משוחרר מנקודה A ומגיע עד לנקודה A' (ראה איור 6).



איור 6: קפיץ עם חיכוך

נחשב את המרחק A' באמצעות משפט העבודה - אנרגיה (משוואה 32) .

$$E_k(b) + U_b - E_k(a) - U_a = W_{friction}$$

מאחר שהמהירות בנקודות הקצה, $v_A = v'_A = 0 \rightarrow E_k(b) = E_k(a) = 0$

$$\frac{1}{2}kA'^2 - \frac{1}{2}kA^2 = \int_A^{-A'} \mu mgdx$$

לכן סה"כ

$$\frac{1}{2}k\left(A'^2 - A^2\right) = \mu mg(-A' - A) = -\mu mg(A' + A)$$

נשתמש ב- $A'^2 - A^2 = (A' - A)(A' + A)$ בכדי לרשום

$$\frac{1}{2}k(A' - A) = -\mu mg \quad \rightarrow \quad A' = \frac{kA - 2\mu mg}{k}$$

נשים לב כי בהעדר חיכוך, $\mu = 0$ ונקבל $A' = A$.

עבור $\mu = kA/2mg$ נקבל $A' = 0$ - כלומר הגוף ייעצר בנקודת שיווי המשקל. עבור $\mu = kA/mg$ הגוף ייעצר מיידית - $A' = -A$ כלומר לא תהיה תנועה.

7.2 חוק שימור האנרגיה

ראינו שבהעדר חיכוך, האנרגיה הכללית - קינטית + פוטנציאלית, נשמרת. ואולם, טענתי שכוח החיכוך אינו כוח בסיסי, אלה הוא נובע בעצם מהכוח החשמלי. והכוח החשמלי הוא, כידוע, כוח מרכזי, ולכן הוא משמר. נשאלת השאלה, אם כך,מדוע החיכוך אינו כוח משמר? בצורה כללית יותר, מהיכן מגיעים כוחות לא משמרים ?

את התשובה לשאלה מצא הפיסיקאי הבריטי James Joule . הוא הראה , בסדרה של ניסויים, שאובדן האנרגיה המכנית כתוצאה מחיכוך במערכת נעה, שווה בדיוק לאנרגית החום המתווספת (למים, במקרה שלו). בכך הוא הוכיח שחום הוא צורה של אנרגיה, ושהאנרגיה הכללית במערכת נשמרת. עד כמה שאנחנו יודעים, חוק שימור האנרגיה הוא אחד החוקים הבסיסיים ביותר בטבע.

8 מתי כוח הוא משמר?

כאשר נתון לנו כוח מסויים, נרצה לדעת האם הכוח הוא משמר. נתבונן בהתחלה במקרה הדו מימדי. במקרה זה נרשום:

$$\vec{F}(x,y) = F_1(x,y)\hat{x} + F_2(x,y)\hat{y}$$

כש $F_1(x,y)\ ,\ F_2(x,y)$ הם רכיבי הווקטור.

אם הכוח משמר, אזי מתקיים

$$\vec{F}(x,y) = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y} \tag{33}$$

נשווה את הרכיבים, ונקבל

$$F_1(x,y) = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad ; \quad F_2(x,y) = -\frac{\partial U}{\partial y}. \tag{34}$$

נגזור את המשוואה השמאלית לפי y ואת הימנית לפי x:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \ ; \ \frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \tag{35}$$

מאחר שנגזרות הן חלופיות,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

נקבל את התנאי שהכוח משמר כ-

$$\boxed{\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}} \tag{36}$$

-

8.1 דוגמה

נתבונן בכוח

$$\vec{F} = x^2 y\hat{x} + xy\hat{y}$$

מכאן: $F_x = x^2 y\ ,\ F_y = xy$ לכן

$$\frac{\partial F_X}{\partial y} = x^2 \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = y$$

מאחר ש - $x^2 \neq y$ קיבלנו שהכוח אינו משמר.

נוכל להראות זאת בדוגמה פרטית, ע"י חישוב העבודה המתבצעת בנקודות התחלה וסיום שוות, אך במסלולים שונים (ראה איור 7).

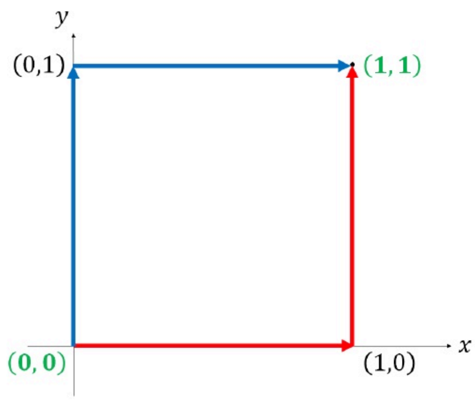
שני המסלולים מתחילים ב- $(x,y) = (0,0)$ ומסתימים ב- $(1,1)$.

העבודה לאורך המסלול האדום:

$$\int_0^1 F_X|_{y=0} dx + \int_0^1 F_y|_{x=1} dx = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}[J]$$

העבודה לאורך המסלול הכחול:

$$\int_0^1 F_y|_{x=0} dy + \int_0^1 F_x|_{y=1} dx = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}[J]$$



איור 7: דרכים שונות עליהן פועל הכוח

כמובן, התוצאות שונות - ולכן הכוח אינו משמר, כפי שכבר הוכחנו.
במקרה התלת מימדי, החישוב למעשה זהה. - יש לדרוש שלושה שיוויונות. התוצאה הסופית היא

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0 \tag{37}$$

הערה: מבחינה מתימטית, נדרש שהכוח מתנהג בצורה "יפה" - כלומר רציף במרחב, בעל נגזרת רציפה וכו'. ואולם בפיסיקה (בניגוד למתימטיקה), זה בדרך כלל המצב.

רשימת מקורות

[1] Kleppner, D. & Kolenkow, R., *"An Introduction to Mechanics"* (Cambridge), second edition.
[2] Kittel, C., *"Mechanics"* (Berkeley Physics Course Vol. 1, McGraw-Hill);

תרגום לעברית על ידי האוניברסיטה הפתוחה